Проф. Н. К. БАРИ

ТЕОРИЯ РЯДОВ

УЧЕБНИК
ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

УТВЕРЖДЕНО НАРКОМПРОСОМ РСФСР

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА ★ 1938

Отв. редактор *Н. И. Вайсфельд*
Техн. редактор *В. С. Якунина*
Чертежи в тексте художника
Н. А. Медведяновского
Корректор *Е. В. Сапгир*

Сдано в набор 16/IV 1938 г. Подписано к печати 5/VII 1938 г. Тираж 10 000 экз. Формат бумаги 60 × 92/16. Бумага ф-ки им. Менжинского. Печ. 11 л. Авт. 13,4 л. Бумажных 5,5 л. В 1 бум. л. 107 000 тип. зн. Уполномоченный Главлита № Б-48755.
Учпедгиз № 10656. Индекс У-3. Заказ № 1887.

1-я Образцовая типография Огиза РСФСР. треста „Полиграфкнига“. Москва, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава первая.

Числовые ряды.

Стр.

§ 1. Бесконечные последовательности 5
§ 2. О пределе последовательности 7
§ 3. Критерий Коши 10
§ 4. Понятие о ряде 11
§ 5. Остаток ряда 12
§ 6. Простейшие операции над рядами 13
§ 7. Необходимый признак сходимости 15
§ 8. Теорема Коши 16
§ 9. Ряды с положительными членами 17
§ 10. Признаки Даламбера и Коши 19
§ 11. Интегральный признак Коши 23
§ 12. О перестановке членов ряда 30
§ 13. Об абсолютной и условной сходимости 30
§ 14. Знакочередующиеся ряды 32
§ 15. О достаточных признаках сходимости рядов 34
§ 16. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов . . 37
§ 17. Арифметические операции над рядами 42

Глава вторая.

Функциональные ряды.

§ 18. Последовательности функций 49
§ 19. Понятие о функциональном ряде и его сходимости . . . 51
§ 20. О различных видах сходимости последовательности функций 52
§ 21. Равномерная сходимость последовательности 55
§ 22. Равномерная сходимость ряда 59
§ 23. Критерий Вейерштрасса . . 61
§ 24. Непрерывность суммы ряда 65
§ 25. Интегрирование рядов . . . 69
§ 26. Диференцирование рядов . 75
§ 27. Непрерывная функция без производной 78

Глава третья.

Степенные ряды.

§ 28. Введение 82
§ 29. Интервал сходимости . . . 83
§ 30. Непрерывность суммы степенного ряда 88
§ 31. Диференцирование степенного ряда 89
§ 32. Ряд Маклорена. Единственность разложения функции в степенной ряд 91
§ 33. Интегрирование степенных рядов 92
§ 34. Ряды Тейлора и Маклорена 94
§ 35. Разложение в ряд для функции e^x 98
§ 36. Разложение в ряд функций $\sin x$ и $\cos x$ 99

Стр.

§ 37. Формулы Тейлора и Маклорена. Остаточный член в форме Лагранжа 102
§ 38. Остаточный член в форме Коши 107
§ 39. Приложение формулы Тейлора к задаче об отыскании максимума и минимума 109
§ 40. Сходимость рядов Тейлора и Маклорена 113
§ 41. Разложение в ряд ln $(1+x)$ 115
§ 42. Составление таблиц логарифмов 117
§ 43. Биномиальный ряд 120
§ 44. Разложение в ряд arc sin x 122
§ 45. Вычисление эллиптических интегралов при помощи рядов 123
§ 46. Другие примеры вычисления интегралов при помощи рядов 126
§ 47. Теорема Вейерштрасса . . 128

Глава четвертая.

Ряды Фурье.

§ 48. Понятие о тригонометрическом ряде 134
§ 49. Определение коэфициентов по формулам Фурье 136
§ 50. О функциях, изобразимых рядами Фурье 140
§ 51. Примеры разложения функций в ряд Фурье 142
§ 52. Стремление к нулю коэфициентов Фурье 144
§ 53. Интеграл Дирихле 147
§ 54. Сходимость рядов Фурье в простейших случаях 150
§ 55. Среднее квадратическое уклонение тригонометрического многочлена от заданной функции 154
§ 56. Неравенство Бесселя . . . 159
§ 57. Сходимость в среднем для ряда Фурье и равенство Парсеваля 160
§ 58. Доказательство равенства Парсеваля 162
§ 59. Теорема единственности . . 166
§ 60. Ряд Фурье для непрерывной и диференцируемой функции 170
§ 61. Теорема Вейерштрасса для периодических функций . . 172
§ 62. Доказательство теоремы единственности на основе теоремы Вейерштрасса . . 173
§ 63. Вывод равенства Парсеваля из теоремы Вейерштрасса . 176

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

§ 1. Бесконечные последовательности.

В самых разнообразных вопросах анализа мы встречаемся с понятием *бесконечной последовательности* чисел. *Если, в силу некоторого закона, у нас образуются последовательно первое, второе, третье, ... число таким образом, что каждому целому числу n соответствует одно и только одно число a_n, то мы говорим, что числа*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

образуют бесконечную последовательность.

Например, квадраты всех целых чисел

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots \tag{1}$$

образуют бесконечную последовательность; здесь $a_n = n^2$.

Полагая a_n равным $\frac{1}{n}$, $(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$, $\frac{2^n-1}{2^n}$, получим соответственно последовательности:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots; \tag{2}$$

$$\frac{1}{1^2}, -\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}, \ldots; \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots. \tag{4}$$

Мы считаем бесконечную последовательность заданной, если известен способ, по которому можно вычислить любой ее член, зная его место в последовательности, т. е. если известен способ найти a_n, когда n дано. Способы эти могут быть самыми разнообразными, и не следует думать, что должна непременно существовать формула, позволяющая непосредственно написать a_n для заданного n. Так, например, зная, что число π в виде бесконечной десятичной дроби пишется так:

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\ldots,$$

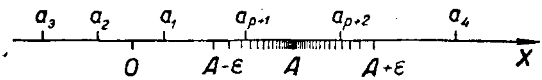
мы можем обозначить через a_n приближенную величину π, вычисленную при сохранении лишь n первых десятичных знаков в этом разложении; мы будем иметь: $a_1 = 3{,}1$; $a_2 = 3{,}14$; $a_3 = 3{,}141$; $a_4 = 3{,}1415$; ..., и для всякого n сможем найти a_n, последовательно вычисляя один за другим десятичные знаки в разложении π; но у нас нет формулы, которая позволила бы сразу написать величину a_n, как только n известно, потому что мы не можем сразу сказать, какая цифра стоит в разложении π, например, на 19-м месте, не вычислив предварительно восемнадцать предшествующих цифр.

Еще пример. Известно, что простых чисел (т. е. таких, которые делятся только на 1 и самого себя) имеется бесконечное множество[1]). Если мы обозначим через a_n то простое число, которое будет стоять на n-м месте, когда мы запишем все простые числа в порядке возрастания,

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19, \ldots,$$

то у нас нет формулы, позволяющей написать a_n для каждого заданного n.

Как бы то ни было, имеем ли мы формулу, выражающую a_n через n, или закон, выраженный словами, мы можем сказать, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ являются значениями некоторой переменной величины, изменяющейся вместе с изменением номера n: эта переменная величина последовательно принимает значение a_1, затем a_2, затем a_3 и т. д.



Черт. 1.

Как известно, переменная величина может изменяться самыми разнообразными способами; один из наиболее важных случаев — тот, когда переменная величина *стремится к некоторому пределу*. Число A будет пределом переменной величины a_n, если как угодно малому положительному числу ε можно привести в соответствие такое целое число p, что разность между A и a_n по абсолютной величине меньше ε, как только n превосходит p, т. е.

$$|a_n - A| < \varepsilon, \qquad n > p.$$

Если n-й член a_n последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет своим пределом число A, то мы будем говорить, что *последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *имеет пределом* A, или *последовательность сходится к* A. Другими словами, как бы мало ни было число ε, все члены последовательности, начиная с члена a_{p+1}, заключены между $A - \varepsilon$ и $A + \varepsilon$; членов последовательности, которые меньше $A - \varepsilon$ или больше $A + \varepsilon$, имеется лишь конечное число, и эти члены не оказывают влияния ни на существование предела, ни на его величину.

Например, последовательность (2), (3) и (4) имеют пределы, так как $\frac{1}{n}$ $\left(\text{значит, и } \frac{1}{n^2}\right)$ стремится к 0, а $\frac{2^n - 1}{2^n}$ стремится к 1, когда n неограниченно возрастает.

Если мы отметим на оси OX (черт. 1) точки с абсциссами $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, то в случае, когда последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет пределом число A, все точки нашей последовательности, начиная с a_{p+1}, окажутся от A на расстоянии меньшем, чем ε, т. е. попадут в интервал

[1]) Это предложение было доказано еще Эвклидом.

сколь угодно малой длины с центром в точке A; вне этого интервала лежит лишь конечное число точек нашей последовательности.

Если последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет A своим пределом, то все ее члены, начиная с некоторого, заключены между $A-\varepsilon$ и $A+\varepsilon$; значит, если A не равно нулю, то все члены последовательности, начиная с некоторого, будут иметь тот же знак, что и A, в чем можно убедиться, взяв ε меньшим, чем абсолютная величина A. Обратно, если в последовательности нет отрицательных членов или их только конечное число, то A не может быть отрицательным, так как если бы оно было отрицательным, то все члены, начиная с некоторого, оказались бы отрицательными. Значит, если все члены последовательности или все, кроме конечного числа, положительны или равны нулю, то и предел может быть только положительным или равным нулю. Точно так же; если все члены последовательности, кроме, быть может, конечного числа, отрицательны или равны нулю, то и предел может быть только отрицательным или равным нулю. Вообще, если члены последовательности не превосходят какого-нибудь числа B, то и предел ее не может превосходить B.

Если нам известно, что последовательность сходится к A, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то при достаточно большом n можно рассматривать a_n как приближенную величину для A; эту приближенную величину можно вычислить, когда последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ задана. Часто бывает, что нет другого способа вычислить A, кроме как рассматривать ее как предел заданной последовательности; тогда члены этой последовательности дают для A приближенные значения, причем эти значения как угодно близки к A, если только мы будем брать достаточно далекие члены в нашей последовательности. Именно таким образом в элементарной геометрии вычисляют приближенно длину окружности данного радиуса: вычисляют периметр вписанного в эту окружность или описанного около нее правильного многоугольника с очень большим числом сторон.

§ 2. О пределе последовательности.

Когда последовательность задана, то важно уметь установить, имеет ли она предел, даже если мы не умеем вычислить этот предел. Рассмотрим некоторые случаи, когда существование предела устанавливается легко.

Допустим, что члены последовательности идут все время возрастая или хотя бы не убывая, т. е.

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \ldots.$$

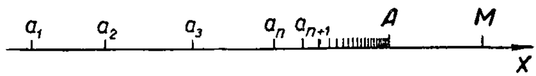
Такая последовательность называется *возрастающей*. Если изображать числа этой последовательности в виде точек, лежащих на прямой, то эти точки движутся вправо, так как каждая точка, по условию, либо правее предыдущей, либо с ней совпадает. Могут представиться два случая: или a_n неограниченно возрастает при неограниченном возрастании n, т. е., каково бы ни было число N, все члены нашей последовательности, начиная с некоторого, превосходят N (так будет, например, в случае последовательности всех целых чисел: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$); или же все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ меньше некоторого постоянного числа M. Во втором случае последовательность называется *ограниченной сверху*.

Можно доказать, что **всякая возрастающая последовательность, ограниченная сверху, имеет предел.** Доказательства этого предложения мы приводить не будем; но для пояснения заметим, что возрастающая последовательность, ограниченная сверху, представляется геометрически в виде последовательности точек, движущихся вправо, но остающихся все время левее некоторой постоянной точки M; поэтому с точки зрения интуиции вполне естественно, что эти точки в конце концов скопляются около некоторой точки A, лежащей тоже левее M или совпадающей с M (черт. 2).

В случае же, когда a_n неограниченно возрастает вместе с n, точки движутся вправо, неограниченно удаляясь; в этом случае можно условно писать

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Примером *возрастающей* последовательности, ограниченной сверху, может служить последовательность периметров вписанных в окружность правильных многоугольников с возрастающим числом сторон: каждый из этих периметров меньше, чем, например, периметр любого многоугольника, описанного около этой же окружности. Длина окружности и есть предел этой последовательности периметров.



Черт. 2.

Совершенно аналогично мы назовем последовательность *убывающей*, если

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$$

Если все члены последовательности превосходят некоторое число L, мы назовем ее *ограниченной снизу*, и можно доказать, что **всякая убывающая последовательность, ограниченная снизу, имеет предел.** В случае, когда для всякого отрицательного числа N все члены последовательности, начиная с некоторого, будут меньше N, как, например, для $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$, можно условно писать:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Часто приходится рассматривать одновременно две последовательности, из которых одна возрастающая,

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots,$$

а другая убывающая,

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots,$$

причем каждый член первой последовательности меньше любого члена второй последовательности, т. е.

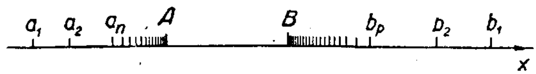
$$a_n < b_p \text{ для любых } n \text{ и } p.$$

В этом случае первая последовательность должна иметь предел A, так как она возрастающая и ограниченная сверху, а вторая должна иметь предел B, так как она убывающая и ограниченная снизу (черт. 3). Ясно, что для любых n и p мы имеем: $a_n \leqslant A \leqslant b_p$ и $a_n \leqslant B \leqslant b_p$. Нетрудно убедиться, что $A \leqslant B$. Если бы мы имели $A > B$, то, взяв n и p достаточно большими для того, чтобы a_n отличалось от A меньше, чем на ε, а b_p отличалось бы от B меньше, чем на ε, мы получили бы:

$$a_n - b_p > (A - \varepsilon) - (B + \varepsilon) = A - B - 2\varepsilon,$$

а так как ε как угодно мало, то отсюда следовало бы, что $a_n - b_p > 0$ и, значит, $a_n > b_p$, что противоречит условию; итак $A \leqslant B$.

Особенно интересен случай, когда известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Тогда разность $B - A$, которая должна быть меньше $b_n - a_n$ при всяком n, оказывается необходимо равной нулю, т. е. $A = B$. В этом случае числа a_n дают приближения числа A по недостатку, а числа b_n — приближения по избытку с любой степенью точности.



Черт. 3.

Именно так бывает, когда мы хотим вычислить какое-нибудь иррациональное число, например $\sqrt{2}$, и берем для этого десятичные дроби, останавливая вычисление на первом, потом на втором, ..., на n-м десятичном знаке. Так как мы каждый раз можем взять приближение по недостатку или по избытку, то получаем две последовательности:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ 1{,}414213;\ \ldots,$$
$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422;\ 1{,}414214;\ \ldots,$$

из которых первая возрастает и ограничена сверху, вторая убывает и ограничена снизу; кроме того, каждый член первой последовательности меньше каждого члена второй последовательности, а разность между n-м членом второй последовательности и первой последовательности есть $\frac{1}{10^{n-1}}$, а потому она стремится к нулю при неограниченно возрастающем n.

Рассмотрим теперь последовательности, которые не имеют пределов. Таковы, например, последовательности:

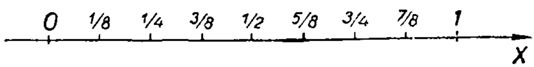
$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots,$$
$$2,\ -4,\ +8,\ \ldots,\ (-1)^{n+1}\cdot 2^n,\ \ldots,$$
$$-1,\ +1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots,$$
$$\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+1},\ \ldots.$$

Такие последовательности иногда называют **расходящимися**. Последовательность может не иметь предела потому, что ее n-й член a_n неограниченно возрастает, как, например, в случае $a_n = n^2$; хотя в этом случае условно пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, но следует считать, что последовательность не имеет предела. Отсутствие предела может, как во втором примере, где $a_n = (-1)^{n+1}\cdot 2^n$, быть вызвано тем, что a_n *по абсолютной величине* неограниченно возрастает. В примерах третьем и четвертом n-й член последовательности остается ограниченным по абсолютной величине: в третьем примере $|a_n|=1$ при всяком n, в четвертом $|a_n|<1$ при всяком n; однако обе эти последовательности не имеют пределов, так как при неограниченном возрастании n числа a_n вместо того, чтобы приближаться к одному числу, оказываются попеременно то вблизи -1, то вблизи $+1$ (или в самых этих точках, как в третьем примере).

В двух последних примерах последовательность может быть рассматриваема как составленная из двух последовательностей, из которых одна имеет пределом -1, а другая $+1$. Но, разумеется, можно придумать гораздо более сложные случаи расходимости. Так, например, у последовательности

$$
\begin{array}{c}
\frac{1}{2}, \\
\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}, \\
\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \frac{5}{2^n},\ \ldots,\ \frac{2^n-1}{2^n}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

не только нет никакого предела, но для любого числа x, заключенного между 0 и 1, и для всякого положительного ε можно найти в нашей последовательности число a_n, которое отличается от x меньше, чем на ε. Для этого доста-



Черт. 4.

точно взять m настолько большим, чтобы $\frac{1}{2^{m-1}}<\varepsilon$; тогда число x окажется либо совпадающим с одним из чисел: $0, \frac{1}{2^m}, \frac{3}{2^m}, \ldots, \frac{2^m-1}{2^m}$, 1, либо лежащим между двумя соседними из этих чисел, а так как расстояние между такой парой соседних чисел равно $\frac{2}{2^m}=\frac{1}{2^{m-1}}<\varepsilon$, то, обозначая через a_n одно из этих чисел, ближайшее к x, мы видим, что $|a_n-x|<\varepsilon$.

Геометрически можно сказать, что в примере

$$\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ \ldots,\ +(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+1},\ \ldots$$

точки последовательности группировались вблизи двух точек: -1 и $+1$, а в только что рассмотренном примере они группируются вблизи любой точки отрезка (0,1) (на чертеже 4 показано расположение первых 7 точек нашей последовательности).

§ 3. Критерий Коши.

Полное решение вопроса о том, когда последовательность имеет предел, дается следующей теоремой Коши:

Для того чтобы последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы каждому положительному числу ε соответствовало такое целое число p, что $|a_n-a_m|<\varepsilon$ для всех целых чисел n и m, превосходящих p.

Доказательство необходимости этого условия чрезвычайно просто. Если последовательность имеет предел A, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$; следовательно, все члены последовательности, начиная с некоторого, например $p+1$-го, заключены в интервале $(A-\eta,\ A+\eta)$, а потому разность любых двух из этих членов меньше 2η; достаточно взять $\eta<\frac{\varepsilon}{2}$, чтобы неравенство $|a_n-a_m|<\varepsilon$ было справедливо для $n>p$ и $m>p$.

Доказательство достаточности этого условия мы приводить не будем, а дадим лишь некоторое пояснение: если условие выполнено, то все члены последовательности, начиная с a_{p+1}, принадлежат интервалу $(a_p-\varepsilon,\ a_p+\varepsilon)$, длина которого как угодно мала; если числа a_n рассматривать как точки, то можно предвидеть, что точки $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ сгруппируются около некоторой точки A (см. черт. 1).

§ 4. Понятие о ряде.

Если дана бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, то, соединяя их в том порядке, в котором они даны, знаком плюс, как если бы мы их складывали, мы получим символ

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

носящий название *ряда*; числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются *членами* ряда.

Так как фактически произвести сложение бесконечного множества чисел нельзя, то мы и рассматриваем написанное выше выражение лишь как некоторый символ и должны уяснить себе, в каких случаях этому символу можно придать числовой смысл.

Положим

$$s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,$$

т. е. рассмотрим сумму n первых членов нашего ряда и назовем ее *частной суммой* ряда. Когда n меняется, то меняется и s_n. Возможны два случая: или s_n при неограниченном возрастании n стремится к некоторому числу S; в этом случае ряд называется *сходящимся* и число S называется *суммой* ряда; или же s_n не стремится ни к какому пределу; в этом случае ряд называется *расходящимся* и не имеет суммы.

Числа $s_1=u_1,\ s_2=u_1+u_2, \ldots,\ s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n, \ldots$ образуют последовательность

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots.$$

Сравнивая данное выше определение сходимости последовательности с определением сходимости ряда, мы можем сказать, что *ряд называется сходящимся, если сходится последовательность его частных сумм.* Подобно тому как члены последовательности служили для приближенного вычисления ее предела, так и для нахождения суммы ряда мы будем брать его частные суммы в качестве приближений.

В качестве первого примера на решение вопроса о сходимости ряда рассмотрим геометрическую прогрессию

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots,$$

с первым членом a и знаменателем r. Здесь можно сумму n первых членов записать так:

$$s_n=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-a\frac{r^n}{1-r},$$

и нужно различать следующие случаи:

1) Если $|r| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, а потому

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} a\,\frac{r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r};$$

таким образом мы видим, что ряд сходится и его сумма

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

В случае, когда $|r| < 1$, прогрессия называется убывающей, так как тогда абсолютная величина каждого следующего члена меньше абсолютной величины предыдущего. Итак, мы доказали, что убывающая геометрическая прогрессия есть сходящийся ряд.

2) Если $|r| > 1$, то $|r|^n$ неограниченно возрастает при неограниченном возрастании n, а значит, если только $a \neq 0$, неограниченно возрастает и $\left|a\,\frac{r^n}{r-1}\right|$; но

$$s_n = a\,\frac{r^n}{r-1} - \frac{a}{r-1},$$

а потому $|s_n|$ неограниченно возрастает и, следовательно, не стремится к конечному пределу; поэтому ряд расходится.

В случае, когда $|r| > 1$, прогрессия называется возрастающей, так как тогда каждый ее член по абсолютной величине больше предшествующего. Следовательно, мы доказали, что возрастающая геометрическая прогрессия есть расходящийся ряд.

3) Если $r = 1$, то ряд принимает вид:

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots.$$

Ясно, что в этом случае $s_n = na$, а потому, если $a \neq 0$, то $|s_n|$ неограниченно возрастает при неограниченном возрастании n; значит, ряд расходится.

4) Если $r = -1$, то ряд примет вид

$$a - a + a - a + \ldots,$$

а потому $s_n = a$ для нечетного n и $s_n = 0$ для четного n. Следовательно, если $a \neq 0$, s_n не стремится ни к какому пределу, и ряд расходится.

Окончательно можно сказать, что если $a \neq 0$, то при $|r| < 1$ геометрическая прогрессия есть сходящийся, при $|r| \geqslant 1$ — расходящийся ряд.

§ 5. Остаток ряда.

Если мы рассмотрим два ряда,

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots$$

и

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots,$$

из которых второй получится тогда, когда берут члены первого, начиная с u_{p+1}, то оба ряда или одновременно сходятся или одновременно расходятся.

В самом деле, если s_n есть сумма n первых членов первого, а S_n — второго ряда, то ясно, что

$$s_{p+n} = (u_1 + u_2 + \ldots + u_p) + (u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n}) = s_p + S_n.$$

Если первый ряд сходится, то s_{p+n} стремится к определенному пределу S, когда n, а значит, и $p+n$ неограниченно возрастают; но так как $S_n = s_{p+n} - s_p$, то, следовательно, S_n стремится к пределу $S - s_p$; значит, второй ряд сходится. Обратно, если второй ряд сходится и имеет суммой число σ, значит, S_n стремится к σ при неограниченном возрастании n; следовательно, при неограниченном возрастании n и s_{n+p} стремится к пределу, равному $\sigma + s_p$, т. е. первый ряд сходится. Если один из двух рядов расходится, то второй не может сходиться, так как иначе сходился бы и первый.

В случае, когда оба ряда сходятся, сумма второго ряда называется остатком первого ряда, причем, для того чтобы указать, что второй ряд начинается с члена u_{p+1}, принято говорить, что его сумма есть p-й остаток и обозначать его через R_p. Так как сумма первого ряда равна сумме его первых p членов, сложенной с остатком, то можно написать:

$$S = s_p + R_p.$$

Иначе говоря, p-й остаток есть та *ошибка*, которую мы сделаем, если вместо суммы ряда будем брать сумму его p первых членов. Так как $R_p = S - s_p$, то ясно, что при неограниченном возрастании p остаток R_p стремится к нулю.

Так, например, в убывающей геометрической прогрессии мы видели, что

$$s_n = \frac{a}{1-r} - a\frac{r^n}{1-r} \quad \text{и} \quad S = \frac{a}{1-r},$$

а потому

$$R_n = a\frac{r^n}{1-r}.$$

Во многих случаях у нас нет другого способа вычислить некоторое число, кроме рассмотрения ряда, суммой которого оно служит. Тогда приближенным значением этого числа является сумма n первых членов ряда. Ряд будет тем более удобен для вычислений, чем меньше сделанная ошибка, т. е. чем меньше остаток. Иногда R_n очень быстро убывает с возрастанием n; в этих случаях о ряде можно сказать, что он *быстро сходится*; такой ряд особенно удобен для вычислений.

§ 6. Простейшие операции над рядами.

Из определения суммы ряда и из основных теорем о пределах мы получаем следующие предложения:

1. Если C есть постоянное число, а

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

есть сходящийся ряд с суммой S, то ряд

$$Cu_1 + Cu_2 + \ldots + Cu_n + \ldots$$

также сходится и имеет сумму CS.

2. Если два ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

сходятся и имеют соответственно суммами S_1 и S_2, то ряд

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots$$

сходится и имеет суммой S_1+S_2.

Это предложение можно доказать и для любого конечного числа рядов. Оно, разумеется, справедливо и для разности двух рядов.

3. Если ряд сходится, то он останется сходящимся и после того, как мы изменим некоторое конечное число его членов; сумма полученного при этом ряда будет равна сумме данного ряда плюс сумма разностей между измененными членами и первоначальными членами.

4. Если оба ряда

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$
$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots$$

сходятся и если мы имеем для всякого n неравенство $u_n \leqslant v_n$, то для сумм S_1 и S_2 этих рядов мы также имеем $S_1 \leqslant S_2$, причем непременно будет $S_1 < S_2$, если, при условии $u_n \leqslant v_n$, имеется хоть одно n, для которого $u_n < v_n$. В самом деле: $S_2 - S_1$ есть сумма ряда

$$(v_1-u_1)+(v_2-u_2)+\ldots+(v_n-u_n)+\ldots,$$

в котором все члены положительны или равны нулю; следовательно, сумма n первых членов этого ряда при всяком n или положительна или равна нулю, а потому она не может иметь отрицательный предел при неограниченном возрастании n; если же хоть при одном n имеем $u_n < v_n$, значит, в последнем ряде есть положительный член, а все остальные не могут быть отрицательными; поэтому $S_2 - S_1$ положительно, т. е. $S_1 < S_2$.

Вышеприведенные теоремы указывали на возможность *в некоторых случаях* обращаться со сходящимися рядами как с *конечными суммами. Но было бы большой ошибкой думать, что все законы, справедливые для конечных сумм, сохраняют силу и для сходящихся рядов*. Например мы знаем, что сумма конечного числа слагаемых не зависит от их порядка; однако впоследствии мы увидим, что в сходящихся рядах нельзя переставлять члены как угодно: это можно делать лишь при некоторых ограничительных условиях, в общем же случае от этого не только может измениться сумма ряда, но он может сделаться даже расходящимся.

Далее, если в сумме конечного числа членов некоторые члены сгруппированы вместе, что обозначено скобкой, то уничтожение скобок, соединенных знаком плюс, является совершенно законной операцией, тогда как для рядов этого, вообще говоря, делать нельзя. Поясним примером.

Ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$$

есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{2}$ и первым членом $\frac{1}{2}$; для него

$$s_n=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n};$$

значит, сумма $S=1$.

Мы можем поэтому сказать, что ряд

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{7}{8}\right)+\ldots+\left(1-\frac{2^n-1}{2^n}\right)+\ldots$$

сходится и имеет сумму, равную 1. Но если мы уничтожим скобки, то получим ряд:

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+1-\frac{7}{8}+\ldots+1-\frac{2^n-1}{2^n}+\ldots,$$

и нетрудно показать, что он расходится. В самом деле, если мы обозначим через s_n сумму n первых его членов, то надо будет различать два случая: когда n четное и когда оно нечетное. Если n четное, т. е. $n=2m$, то

$$s_n=1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+\ldots+1-\frac{2^m-1}{2^m}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^m}=1-\frac{1}{2^m};$$

если же n нечетное, т. е. $n=2m+1$, то

$$s_n=1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+\ldots+1-\frac{2^m-1}{2^m}+1=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^m}+1=1-\frac{1}{2^m}+1=2-\frac{1}{2^m}.$$

Отсюда следует, что при n, достаточно большом и четном, s_n очень близко к 1, а при n, достаточно большом и нечетном, s_n очень близко к 2. Это показывает, что s_n не стремится ни к какому пределу при неограниченном возрастании n; значит, ряд расходится.

Этот пример указывает на необходимость осторожного обращения с рядами: нельзя поступать со всяким сходящимся рядом так, как мы поступали бы с конечной суммой.

§ 7. Необходимый признак сходимости.

Чрезвычайно важно уметь установить, является ли данный ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

сходящимся или нет; этот вопрос эквивалентен вопросу о том, стремится ли сумма s_n первых n членов ряда к некоторому пределу, когда n неограниченно возрастает. Нетрудно сразу получить *необходимое* условие сходимости. Для этого достаточно заметить, что если ряд сходится, то s_n стремится к определенному пределу S при неограниченном возрастании n; но так как

$$s_n=u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+u_n,$$
$$s_{n-1}=u_1+u_2+\ldots+u_{n-1},$$

то

$$u_n=s_n-s_{n-1}.$$

Если n неограниченно возрастает, то и $n-1$ также возрастает неограниченно, а потому s_{n-1} также стремится к пределу S. Отсюда следует, что u_n стремится к нулю, и мы можем высказать следующее предложение:

Для того чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы *n*-й член его стремился к нулю при неограниченном возрастании *n*.

Таким образом, если *n*-й член ряда не стремится к нулю, ряд должен расходиться. Например, расходимость рассмотренного в § 6 ряда

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+\ldots+1-\frac{2m-1}{2m}+\ldots$$

можно было бы доказать, пользуясь только что полученным признаком.

Однако полученный признак, будучи необходимым, не является достаточным, так как ряд может оказаться расходящимся даже и тогда, когда его *n*-й член стремится к нулю. Например, ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

носящий название *гармонического*, имеет *n*-й член $u_n=\frac{1}{n}$, а потому u_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n; однако, этот ряд, как мы сейчас увидим, расходится. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если бы ряд сходился, его остаток

$$\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+p}+\ldots$$

должен был бы стремиться к нулю при неограниченном возрастании n; а между тем, если мы рассмотрим сумму

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n},$$

то убедимся, что каждый ее член, кроме последнего, превосходит $\frac{1}{2n}$, а последний равен $\frac{1}{2n}$; число членов есть n, поэтому рассмотренная сумма больше $\frac{n}{2n}$, т. е. больше $\frac{1}{2}$, а это показывает, что

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}+\ldots$$

не может стремиться к нулю, когда n неограниченно возрастает, и, следовательно, гармонический ряд расходится.

§ 8. Теорема Коши.

Существует теорема Коши, позволяющая, как и в случае вопроса о пределе последовательности, решить до конца вопрос о сходимости ряда:

Для того чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было положительное число ε, можно было найти такое целое число *N*, что для всех *n*, превосходящих *N*, и для всех целых *p* частные суммы ряда удовлетворяют неравенству

$$|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon.$$

Необходимость этого условия совершенно очевидна, так как если ряд сходится, то s_n стремится к некоторому пределу S при n, неограниченно возрастающем, а тогда при достаточно большом n как s_n, так и s_{n+p} отлича-

1541 1a/60

ются от S меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, поэтому они отличаются друг от друга меньше, чем на ε.

Доказательства достаточности мы приводить не будем.

Следует заметить, что хотя теорема Коши и дает полное решение вопроса о сходимости, но применять ее на практике почти невозможно. Другими словами, если дан некоторый индивидуальный ряд, то нисколько не легче установить, пользуясь признаком Коши, сходится он или нет, чем просто проверить, имеет ли сумма s_n его первых n членов какой-нибудь предел при неограниченном возрастании n. Поэтому, хотя признак Коши и имеет громадное теоретическое значение, позволяя доказывать многие теоремы о рядах, но для практического решения вопроса о сходимости того или иного ряда применяют другие признаки, хотя не столь общие, но зато более простые. К отысканию таких признаков мы теперь и перейдем, но предварительно сделаем одно общее замечание.

На основании того, что говорилось в § 5, мы можем при решении вопроса о сходимости или расходимости ряда пренебрегать любым числом его первых членов. Это удобно в тех случаях, когда в первых членах имеется некоторая иррегулярность[1]).

В дальнейшем мы остановимся на изучении одного частного класса рядов, а именно таких, у которых каждый член либо положителен, либо равен нулю. Этот класс рядов тем более важен, что, найдя для него критерий сходимости, мы с его помощью будем иметь возможность часто решать вопрос и о сходимости рядов, члены которых могут быть как положительны, так и отрицательны.

Если в некотором ряде все члены положительны или равны нулю, то, отбрасывая равные нулю члены, мы не нарушим сходимости, если она была, и не изменим суммы ряда. Поэтому все сводится к изучению рядов с положительными членами.

§ 9. Ряды с положительными членами.

Пусть

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

есть ряд, все члены которого положительны. Ясно, что если s_n есть сумма n первых его членов, то при всяком n имеем $s_{n+1} > s_n$; значит, последовательность частных сумм нашего ряда будет возрастающей. Но тогда возможны только два случая: или s_n неограниченно возрастает вместе с n, и тогда ряд расходится; или же при всяком n числа s_n остаются меньше некоторого числа M; в этом случае последовательность ограничена сверху, а так как она возрастающая, то (§ 2) она стремится к определенному пределу S, не превосходящему M, т. е. ряд сходится и имеет сумму $S \leqslant M$.

Отсюда ясно, что если ряд с положительными членами сходится, то будет сходиться и всякий ряд, полученный выбрасыванием из него любого конечного или бесконечного множества членов, причем сумма нового ряда меньше суммы первоначального. Но можно получить гораздо более общий результат, если сравнивать два ряда между собой.

---

1) Пусть, например, мы имеем $u_n = n$ для $n = 1, 2, 3$ и $u_n = \frac{1}{2^n}$ для $n = 4, 5, 6, \ldots$; тогда, отбрасывая три первых члена ряда, мы сводим вопрос о его сходимости к вопросу о сходимости убывающей геометрической прогрессии.

Пусть

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (u)$$
$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \qquad (v)$$

два ряда с положительными членами и такие, что при всяком n мы имеем $u_n \leqslant v_n$. Тогда, если ряд (v) сходится и σ есть его сумма, то и ряд (u) сходится и его сумма S удовлетворяет неравенству $S \leqslant \sigma$; если же ряд (u) расходится, то и ряд (v) расходится.

В самом деле, так как $u_n \leqslant v_n$ при всяком n, то сумма s_n первых n членов ряда (u) не превосходит суммы σ_n первых n членов ряда (v) также при всяком n. Но так как все члены ряда (v) положительны и σ его сумма, то $\sigma_n \leqslant \sigma$ при всяком n. Из неравенств $s_n \leqslant \sigma_n$ и $\sigma_n \leqslant \sigma$ следует, что возрастающая последовательность чисел s_n ограничена числом σ, а потому она имеет предел S и $S \leqslant \sigma$. Если же ряд (u) расходится, то s_n неограниченно возрастает вместе с n, а так как $\sigma_n \geqslant s_n$, то σ_n и подавно неограниченно возрастает вместе с n, а потому ряд (v) расходится.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots. \qquad (u)$$

Если мы сравним его с рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots, \qquad (v)$$

то увидим, что каждый член ряда (u) меньше стоящего на том же месте члена ряда (v). Но ряд (v) сходится как убывающая геометрическая прогрессия, поэтому и ряд (u) сходится, причем его сумма <1.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{\lg 2}+\frac{1}{\lg 3}+\ldots+\frac{1}{\lg(n+1)}+\ldots. \qquad (v)$$

Если мы сравним его с рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\ldots, \qquad (u)$$

то увидим, что каждый член ряда (u) меньше соответствующего члена ряда (v). При этом ряд (u) расходится, так как он получается из гармонического ряда отбрасыванием первого члена этого ряда, а расходимость гармонического ряда была нами доказана. Таким образом, мы видим, что ряд (v) тоже должен расходиться.

Полезно заметить, что в этой теореме нет необходимости требовать, чтобы неравенство $u_n \leqslant v_n$ (или $u_n \geqslant v_n$) выполнялось непременно для всех n; если оно выполняется для всех, начиная с некоторого, то теорема остается справедливой, так как конечное число членов ряда не влияет на вопрос о его сходимости.

Например, если бы мы должны были установить, сходится ли ряд

$$\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2}{(k+2)^2}+\frac{3}{(k+3)^2}+\ldots+\frac{n}{(k+n)^2}+\ldots,$$

где k — некоторое целое число, то могли бы рассуждать так: когда $n > k$, то

$$\frac{n}{(k+n)^2} > \frac{n}{(n+n)^2} = \frac{1}{4n};$$

значит, каждый член изучаемого ряда, начиная с $k+1$-го, превосходит соответствующий член ряда

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{4\cdot n} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right),$$

а этот последний расходится, поэтому и заданный ряд также расходится.

§ 10. Признаки Даламбера и Коши.

Способ сравнения рядов приводит нас к двум очень простым и удобным для применения признакам сходимости. Мы получаем их, если в качестве ряда (v), с которым сравнивается заданный ряд (u), возьмем геометрическую прогрессию.

Признак Даламбера. **Если в ряде с положительными членами**

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

отношение $n+1$-го члена к n-му стремится к определенному пределу l при неограниченном возрастании n,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

то в случае, когда $l < 1$, ряд сходится, если $l > 1$, ряд расходится.

Чтобы доказать эту теорему, заметим прежде всего, что если отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ имеет своим пределом число l, то, как бы мало ни было ε, при достаточно большом n, например при $n \geqslant p$, мы будем иметь:

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $l < 1$. Мы можем выбрать ε настолько малым, чтобы $l+\varepsilon$ было все еще меньше 1. Выбрав ε таким образом, обозначим через r сумму $l+\varepsilon$; значит, $r = l + \varepsilon$ и $r < 1$. Для всех значений $n \geqslant p$ имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r, \quad \text{или} \quad u_{n+1} < ru_n;$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
&u_{p+1} < ru_p,\\
&u_{p+2} < ru_{p+1} < r^2u_p,\\
&u_{p+3} < ru_{p+2} < r^3u_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{p+k} < ru_{p+k-1} < r^ku_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Но если $u_{p+k} < r^k u_p$ при всяком целом k, то, значит, члены исследуемого ряда, начиная с u_{p+1}, меньше членов геометрической прогрессии

$$ru_p + r^2 u_p + r^3 u_p + \ldots + r^k u_p + \ldots,$$

причем, так как $r < 1$, эта прогрессия убывающая и, значит, является сходящимся рядом. Отсюда следует, что и данный ряд сходится.

Рассмотрим теперь случай, когда $l > 1$. Мы можем выбрать ε настолько малым, чтобы $l - \varepsilon$ было все еще больше 1. Положим $q = l - \varepsilon$; тогда $q > 1$. Для всех значений n, начиная с некоторого p, имеем;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > q, \quad \text{или} \quad u_{n+1} > qu_n;$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
&u_{p+1} > qu_p,\\
&u_{p+2} > qu_{p+1} > q^2 u_p,\\
&u_{p+3} > qu_{p+2} > q^3 u_p,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&u_{p+k} > qu_{p+k-1} > q^k u_p.\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Поэтому члены нашего ряда, начиная с u_{p+1}, больше членов геометрической прогрессии

$$qu_p + q^2 u_p + q^3 u_p + \ldots q^k u_p + \ldots,$$

а так как $q > 1$, то это прогрессия возрастающая и, следовательно, является расходящимся рядом. Отсюда мы заключаем, что и исследуемый ряд расходится.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} + \ldots.$$

Мы имеем:

$$u_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)};$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

а так как $0 < 1$, то, на основании признака Даламбера, мы заключаем, что ряд сходится.

Мы увидим дальше, что если к сумме этого ряда прибавить 1, то получим неперово число e — основание системы натуральных логарифмов.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n} + \ldots.$$

Мы имеем:

$$u_n = \frac{2^n}{n}; \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1};$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{n}{n+1} = 2,$$

а так как $2>1$, то, согласно признаку Даламбера, заключаем, что ряд расходится.

Совершенно естественно спросить, что можно сказать о ряде, для которого

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1?$$

На этот вопрос приходится ответить так: ряд может как сходиться, так и расходиться. Убедимся в этом на примерах.

Мы уже знаем, что гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

есть ряд расходящийся. Между тем для него

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

С другой стороны, если мы рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

то и для него также имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1.$$

Однако этот ряд, как мы сейчас докажем, сходится. Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

а поэтому сумму s_n первых n членов рассматриваемого ряда можно записать в виде:

$$s_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Раскрыв скобки и произведя сокращение, убедимся, что

$$s_n=1-\frac{1}{n+1},$$

откуда непосредственно ясно, что при неограниченном возрастании n s_n стремится к пределу (равному 1), т. е. ряд сходится.

Другой признак сходимости рядов, основанный, как и признак Даламбера, на сравнении с геометрической прогрессией и принадлежащий Коши, состоит в следующем утверждении:

Признак Коши. **Если для ряда с положительными членами**

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

предел корня n-й степени из n-го члена существует и равен некоторому числу l,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

то в случае $l<1$ ряд сходится, а при $l>1$ ряд расходится.

В самом деле, если l есть предел $\sqrt[n]{u_n}$, то, как бы мало ни было ε, начиная с некоторого p, будем иметь:

$$l-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon, \qquad n\geqslant p.$$

Если $l<1$, мы можем предположить ε настолько малым, что $l+\varepsilon$ все еще меньше 1. Полагая $l+\varepsilon=r$, имеем, следовательно, $r<1$ и

$$\sqrt[n]{u_n}<r, \qquad n\geqslant p,$$

а это значит, что

$$u_p<r^p,\ u_{p+1}<r^{p+1},\ u_{p+2}<r^{p+2},\ldots;$$

следовательно, члены нашего ряда, начиная с p-го, меньше соответственных членов геометрической прогрессии

$$r^p+r^{p+1}+r^{p+2}+\ldots.$$

Но эта прогрессия есть сходящийся ряд, так как $r<1$; отсюда следует, что и исследуемый нами ряд также сходится.

В случае, когда $l>1$, мы можем выбрать ε настолько малым, что $l-\varepsilon$ все еще больше 1. Полагая $q=l-\varepsilon$, имеем, следовательно, $q>1$. Так как

$$\sqrt[n]{u_n}>q,$$

то мы имеем:

$$u_p>q^p,\ u_{p+1}>q^{p+1},\ u_{p+2}>q^{p+2},\ldots;$$

значит, члены нашего ряда, начиная с p-го, больше соответственных членов геометрической прогрессии

$$q^p+q^{p+1}+q^{p+2}+\ldots,$$

являющейся расходящимся рядом, так как $q>1$. Из этого следует, что наш ряд тоже расходится.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots.$$

Применив к нему признак Коши, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

а потому ряд сходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\frac{3}{1}+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n+\ldots.$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2,$$

а потому ряд оказывается расходящимся.

Заметим, что, так же как и для признака Даламбера, случай

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$$

является сомнительным, т. е. при выполнении этого условия ряд может как сходиться, так и расходиться. Действительно, для гармонического ряда мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}};$$

обозначая $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=a_n$, имеем:

$$\lg a_n=\frac{1}{n}\lg\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{\lg n}{n},$$

а потому $\lim\limits_{n\to\infty}\lg a_n=0$, в чем можно убедиться, пользуясь хотя бы правилом Лопиталя. Значит, само a_n стремится к 1, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1.$$

Итак, мы убедились, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$, то ряд может оказаться расходящимся.

Но, с другой стороны, например для ряда

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1,$$

так как $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ стремится к 1, а между тем исследуемый ряд сходится, потому что если отбросить первый член, то в оставшемся ряде члены меньше соответствующих членов ряда

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

в сходимости которого мы убедились, рассматривая примеры на применение признака Даламбера.

Итак, мы видим, что при выполнении условия $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$ ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

§ 11. Интегральный признак Коши.

Для рядов, к которым признаки Даламбера и Коши неприменимы, приходится искать иные способы, чтобы выяснить вопрос об их сходимости. Мы укажем один метод, применимый, правда, лишь к рядам с *монотонно убывающими* членами, но чрезвычайно удобный. Он основан на сравнении данного ряда с некоторым интегралом, верхний предел которого бесконечен.

Напомним, что интеграл

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

н зывается *сходящимся* или *имеющим смысл*, если $\int_a^b f(x)\,dx$ стремится к определенному пределу, когда b неограниченно возрастает. В этом случае мы уславливаемся этот предел обозначать через $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Следовательно,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

в том случае, когда этот предел существует; если же предела нет, то про интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ говорят, что он *не имеет смысла* или что он *расходится*.

Теорема Коши, которая позволяет сравнивать ряды с интегралами, читается так:

Пусть $f(x)$ положительная функция, убывающая и непрерывная для $x \geqslant a$. При этих условиях ряд

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots$$

сходится, если сходится интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Для того чтобы доказать эту теорему, рассмотрим график функции $f(x)$. По условию эта функция положительна и убывает для $x \geqslant a$; кроме того, для $x \geqslant a$, она непрерывна. Функция $f(x)$ может быть левее точки a даже разрывной, например неограниченно возрастать около некоторой точки c, как это изображено на чертеже (черт. 5). Для нас важно, что правее a функция $f(x)$ убывает и непрерывна.

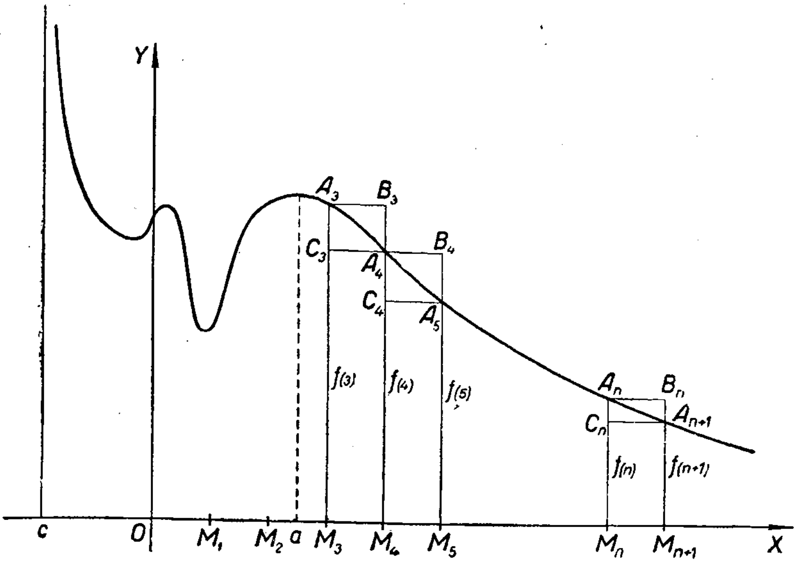
Отметим на оси абсцисс точки M_1, $M_2, \ldots, M_n \ldots$ с координатами $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, и пусть k есть наименьшее целое число, превосходящее a или равное ему (на чертеже $k=3$). В точках M_k, $M_{k+1}, \ldots, M_n, \ldots$ восставим перпендикуляры к оси абсцисс до пересечения их с кривой $y=f(x)$. Пусть A_n есть точка на кривой с абсциссой M_n; тогда ее ордината равна $f(n)$. Проведем из точки A_n параллель к оси абсцисс до пересечения с перпендикуляром, восставленным в точке M_{n+1}; пусть B_n — точка пересечения. Ясно, что прямоугольник $M_nA_nB_nM_{n+1}$ содержит площадь, ограниченную кривой, ординатами, проведенными в M_n и M_{n+1}, и осью абсцисс, так как, по условию, кривая $y=f(x)$ убывает и, значит, максимальная ее ордината на отрезке M_nM_{n+1} оказывается в точке M_n. Поэтому, так как высота рассматриваемого прямоугольника равна $f(n)$, а основание — единице и, значит, площадь его равна $f(n)$, мы имеем:

$$\int_{M_n}^{M_{n+1}} f(x)\,dx < f(n).$$

Если сложим все такие прямоугольники, начиная от точки M_k и до точки M_{n+1}, то получим:

$$\int_{M_k}^{M_{n+1}} f(x)\,dx < f(k) + f(k+1) + \ldots + f(n).$$

Но, с другой стороны, если из точки A_{n+1} проведем параллель к оси абсцисс до пересечения с перпендикуляром, восставленным в точке M_n, то получим некоторую точку C_n, и ясно, что прямоугольник



Черт. 5.

$M_nC_nA_{n+1}M_{n+1}$ в силу той же монотонности функции $f(x)$ содержится внутри площади, ограниченной кривой, осью абсцисс и ординатами в точках M_n и M_{n+1}. Поэтому, заметив, что высота рассматриваемого прямоугольника есть $f(n+1)$, а основание снова равно 1, найдем:

$$f(n+1) < \int_{M_n}^{M_{n+1}} f(x)\,dx.$$

Складывая эти неравенства, получим аналогично предыдущему:

$$f(k+1) + f(k+2) + \ldots + f(n+1) < \int_{M_k}^{M_{n+1}} f(x)\,dx.$$

После этих предварительных рассмотрений перейдем к доказательству теоремы Коши.

Если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, это значит, что существует предел интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при неограниченном возрастании b. Так как $f(x)$ при $x>a$ положительна, то с возрастанием b интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ может только возрастать, а потому при всяком b

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx<\int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что, каково бы ни было n, мы имеем:

$$\int\limits_a^{M_{n+1}} f(x)\,dx<\int\limits_a^\infty f(x)\,dx,$$

а потому, так как $a\leqslant M_k$, то

$$f(k+1)+f(k+2)+\ldots+f(n+1)<\int\limits_{M_k}^{M_{n+1}} f(x)\,dx<\int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

Это значит, что у ряда

$$f(k+1)+f(k+2)+\ldots+f(n)+\ldots,$$

все члены которого положительны, частные суммы остаются ограниченными, а это, как мы знаем, обеспечивает его сходимость. Следовательно, и ряд

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(k)+\ldots+f(n)+\ldots,$$

отличающийся от предыдущего прибавлением конечного числа слагаемых, тоже сходится. Итак, первая половина теоремы Коши доказана.

Допустим теперь, что $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ не имеет смысла. Так как $f(x)$ положительна, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ возрастает вместе с b. Если $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ не имеет смысла, это значит, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ неограниченно возрастает вместе с b, так как если бы он, возрастая, оставался ограниченным, то должен был бы стремиться к определенному пределу. Отсюда мы заключаем, что $\int\limits_a^{M_{n+1}} f(x)\,dx$, а стало быть и отличающийся от него на конечную величину $\int\limits_{M_k}^{M_{n+1}} f(x)\,dx$ должен неограниченно возрастать при неограниченном возрастании n. А так как

$$f(k)+f(k+1)+\ldots+f(n)>\int\limits_{M_k}^{M_{n+1}} f(x)\,dx,$$

то частные суммы ряда

$$f(k)+f(k+1)+\ldots+f(n)+\ldots$$

неограниченно возрастают, а потому ряд' расходится; следовательно, и первоначальный ряд

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(k)+\ldots+f(n)+\ldots$$

также расходится.

Таким образом теорема Коши полностью доказана.

Покажем на примере, как ее применять к исследованию сходимости некоторого данного ряда.

Пусть дан ряд

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots,$$

где p — постоянное положительное число. Заметим, что признак Даламбера в этом случае ничего не дает, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1.$$

Точно так же и признак Коши ничего не дает, ибо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=1.$$

Постараемся применить здесь только что доказанную теорему Коши. Для этого подберем функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы и такую, чтобы $f(n)=\frac{1}{n^p}$. Если мы рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^p}$, то увидим, что она положительна для всех положительных значений x, непрерывна всюду, кроме точки $x=0$, и убывает при возрастании x (так как $p>0$ по условию).

Мы видим, что за a можно принять любое положительное число, например $a=1$, и тогда функция удовлетворяет всем условиям теоремы. Отсюда следует, что рассматриваемый ряд сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}.$$

Здесь придется рассмотреть отдельно два случая: когда $p=1$ и когда $p\neq 1$.

Если $p=1$, мы имеем дело с интегралом

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x}.$$

Но так как $\int_1^b\frac{dx}{x}=\ln b$, то

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=+\infty,$$

а потому интересующий нас $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ расходится. Отсюда следует, что и наш ряд при $p=1$ расходится. Это вполне согласуется с ранее известными нам фактами, так как при $p=1$ ряд обращается в гармонический:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

расходимость которого была ранее доказана.

Рассмотрим теперь случай $p \neq 1$. В этом случае мы имеем:

$$\int\limits_1^b \frac{dx}{x^p}=\frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}\Bigg|_1^b=\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right).$$

Для того чтобы узнать, стремится ли это выражение к пределу, когда b неограниченно возрастает, рассмотрим отдельно случай $p>1$ и случай $p<1$.

Если $p>1$, то $\frac{1}{b^{p-1}}$ стремится к нулю при неограниченном возрастании b, и, следовательно,

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}.$$

Значит, в этом случае интеграл сходится, а потому и ряд

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

сходится при $p>1$.

Если же $0<p<1$, то $\frac{1}{b^{p-1}}=b^{1-p}$ неограниченно возрастает при неограниченном возрастании b, а поэтому интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ расходится, а значит, и ряд

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

расходится при $0<p<1$.

К этому можно добавить, что если $p \leqslant 0$, то n-й член ряда не стремится к нулю при n неограниченно возрастающем, и потому ряд тоже расходится.

Резюмируя все сказанное, можем вывести следующее заключение: ряд

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

сходится при всяком $p>1$ и расходится при всяком $p \leqslant 1$.

Теперь мы можем гораздо более широко применять теорему о сравнении рядов, так как имеем в своем распоряжении бесконечное множество рядов, поведение которых известно: в самом деле, придавая числу p различные значения, мы получаем различные ряды, с членами которых часто бывает легко сравнить члены данного ряда.

Например, рассмотрим ряд:

$$\frac{\ln 1}{\sqrt{1}}+\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{\ln n}{\sqrt{n}}+\ldots .$$

Ни признак Даламбера, ни признак Коши не позволяют судить о его сходимости. Но если мы сравним его с рядом

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots,$$

то увидим, что он должен расходиться, так как при $n>2$

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$

а ряд

$$\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\ldots+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\ldots$$

расходится в силу только что доказанного, так как здесь $p=\frac{1}{2}$.

Подобно этому легко доказать, что ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$$

сходится, потому что члены его меньше членов ряда

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots,$$

который сходится, так как здесь $p=3$.

Приведем еще один пример непосредственного применения теоремы Коши. Пусть дан ряд

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots .$$

Если мы положим $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, то функция $f(x)$ для значений x, превосходящих 1, будет положительной, непрерывной и убывающей. Положив, например, $a=2$; мы можем на основании теоремы Коши утверждать, что ряд будет вести себя так же, как интеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}.$$

Но

$$\int_2^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^b=\ln\ln b-\ln\ln 2,$$

а потому при неограниченном возрастании b он неограниченно возрастает, и, значит, $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ не имеет смысла. Отсюда следует, что рассматриваемый ряд расходится.

§ 12. О перестановке членов ряда.

Для рядов с положительными членами имеет место следующее предложение:

Сумма сходящегося ряда с положительными членами не зависит от порядка членов ряда, или иначе, **два сходящихся ряда с положительными членами, отличающихся только порядком своих членов, имеют одну и ту же сумму.**

Прежде всего нам надо разъяснить, что мы понимаем под словами: „два ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{u}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{v}$$

отличаются только порядком своих членов". Для этого прежде всего заметим, что если в одном из этих рядов имеется бесконечное множество одинаковых членов, отличных от нуля, то такой ряд должен расходиться, так как тогда его n-й член не стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Поэтому если по условию теоремы рассматриваются лишь сходящиеся ряды, то мы вправе считать, что каждый ряд может иметь только конечное число отличных от нуля одинаковых членов. Что касается членов, равных нулю, то их можно отбросить, так как они не влияют ни на сходимость ряда, ни на его сумму.

Установив это, мы можем сказать, что два ряда (u) и (v) отличаются лишь порядком своих членов, если каждое число, являющееся членом первого ряда, входит также и во второй ряд, и притом столько же раз; и обратно, всякое число, являющееся членом второго ряда, фигурирует и в первом, и притом опять столько же раз.

Нам нужно доказать, что если ряд (v) сходится, то ряд (u), отличающийся от него лишь порядком членов, также сходится и имеет ту же сумму.

В самом деле, пусть s_n есть сумма n первых членов ряда (u). Так как каждый из этих членов непременно является некоторым членом ряда (v), то, взяв достаточно большое число, например m, первых членов этого ряда, мы достигнем того, что среди них окажутся все первые n членов ряда (u). Если σ_m есть сумма m первых членов ряда (v), то мы, таким образом, видим, что при достаточно большом m

$$s_n < \sigma_m.$$

Но ряд (v), по условию, сходится; пусть V — его сумма. Так как все члены ряда (v) положительны, то $\sigma_m < V$ при всяком m, а потому

$$s_n < V.$$

Мы убедились, что все частные суммы ряда (u) ограничены и не больше V; поэтому ряд сходится, и его сумма U должна быть меньше или равна V. Но так как мы могли бы провести все те же рассуждения для ряда (v), мы убедились бы, что $V \leqslant U$. Отсюда следует, что $U = V$.

§ 13. Об абсолютной и условной сходимости.

До сих пор мы рассматривали только ряды, все члены которых положительны. Все, что было о них сказано, можно было бы повторить для рядов с отрицательными членами, но это было бы совершенно бесполезно, так как один из этих случаев сводится к другому путем умножения всех членов на -1; от этого ни сходимость, ни расходимость не изменятся, только сумма переменит знак. Рассмотрение рядов, у которых все члены одного знака, кроме некоторых, в конечном числе, тоже не даст ничего нового, так как при решении вопроса о сходимости или расходимости считаться с этими членами не придется. Если предложенный ряд сходится и если, например, все его члены, кроме конечного числа, положительны, то сумма ряда получится, если вычесть из ряда, составленного из одних только положительных членов, сумму абсолютных величин отрицательных членов.

Итак, существенно новое мы можем получить только тогда, когда будем рассматривать ряды, которые содержат бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов. Ряды такого рода делятся на два существенно отличающихся друг от друга класса, к рассмотрению которых мы сейчас и перейдем.

Пусть мы имеем ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots.$$

Рассмотрим одновременно с ним ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, т. е.

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots.$$

Этот ряд с положительными членами может как сходиться, так и расходиться. Введем следующее определение, которое в дальнейшем будет играть важную роль.

Ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

называется *абсолютно* сходящимся, если сходится ряд

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots,$$

составленный из абсолютных величин его членов. Если же ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

сходится, тогда как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то он называется *условно* сходящимся.

Прежде всего мы должны оправдать название „абсолютно сходящийся“, т. е. доказать, что ряд, которому мы сейчас дали такое название, является сходящимся в ранее указанном смысле, иначе говоря, что у такого ряда сумма n первых членов стремится к определенному пределу, когда n неограниченно возрастает.

Чтобы убедиться в этом, напишем u_n в виде:

$$u_n=(u_n+|u_n|)-|u_n|.$$

Таким образом, n-й член исследуемого нами ряда представится в виде разности n-х членов двух рядов, а именно:

$$(u_1+|u_1|)+(u_2+|u_2|)+\ldots+(u_n+|u_n|)+\ldots$$

и

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

Второй ряд сходится по условию; поэтому достаточно доказать сходимость первого ряда, чтобы убедиться в справедливости нашего утверждения, так как разность двух сходящихся рядов есть сходящийся ряд (§ 6). Но в ряде, n-м членом которого служить $u_n+|u_n|$, все члены либо положительны, либо равны нулю, так как

$$u_n+|u_n|=2|u_n|, \quad \text{когда} \quad u_n \geqslant 0,$$
$$u_n+|u_n|=0, \quad \text{когда} \quad u_n \leqslant 0.$$

Поэтому члены этого ряда не превосходят членов ряда

$$2|u_1|+2|u_2|+\ldots+2|u_n|+\ldots,$$

который сходится, так как получается из сходящегося ряда путем умножения всех его членов на 2 (§ 6). На основании теоремы о сравнении рядов (§ 9) мы видим, что сходится ряд с n-м членом $u_n+|u_n|$, а стало быть, на основании сказанного ранее, теорема доказана.

§ 14. Знакочередующиеся ряды.

Ряд называется знакочередующимся, если его члены поочередно то положительны, то отрицательны; таким будет ряд

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots,$$

где все числа $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ положительны. Относительно знакочередующихся рядов можно доказать следующую теорему, принадлежащую Лейбницу.

Если в знакочередующемся ряде

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots$$

мы имеем:

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant \ldots$$

и

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0,$$

то такой ряд сходится.

В самом деле, предположим, что эти условия выполнены, и рассмотрим сумму s_{2n} первых $2n$ членов ряда. Запишем ее в двух видах:

$$s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

и

$$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}.$$

В каждом из этих равенств все скобки положительны или равны нулю в силу условия $u_k \geqslant u_{k+1}$ при всяком k. Из первого равенства ясно, что

$$s_{2n} \geqslant 0$$

и что

$$s_{2n}=s_{2n-2}+(u_{2n-1}-u_{2n}) \geqslant s_{2n-2},$$

т. е. что последовательность величин s_{2n} есть возрастающая последовательность неотрицательных чисел; из второй формулы видно, что она ограничена сверху, ибо $s_{2n} \leqslant u_1$. Значит, при неограниченном возрастании n сумма s_{2n} стремится к определенному пределу S, положительному или равному нулю. Но равенство

$$s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1},$$

в котором u_{2n+1} стремится к нулю при неограниченном возрастании n, показывает, что s_{2n+1} стремится к тому же самому пределу S при неограниченном возрастании n. В итоге мы можем сказать, что s_n стремится к S при неограниченном возрастании n; следовательно, ряд сходится и имеет число S своей суммой.

Мы, кроме того, убедились, что $0 \leqslant S \leqslant u_1$. Случай, когда $S = 0$ — тривиальный; в этом случае $u_1 = u_2$, $u_3 = u_4$, ..., $u_{2n-1} = u_{2n}$, ... Если мы возьмем первые n членов ряда, то остаток ряда есть $(-1)^n r_n$, где

$$r_n = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots$$

Мы видим, что ряд для r_n есть опять знакочередующийся и удовлетворяющий всем условиям теоремы. Поэтому мы можем сказать, что $0 \leqslant r_n \leqslant u_{n+1}$, причем $r_n = 0$ тогда, когда $u_{n+1} = u_{n+2}$, $u_{n+3} = u_{n+4}$, ... Этот случай ввиду его тривиальности можно отбросить. Значит, $0 < r_n \leqslant u_{n+1}$; поэтому равенство

$$S = s_n + (-1)^n r_n$$

показывает, что, заменив S через s_n, мы берем приближение по недостатку или по избытку, смотря по тому, будет ли последний из неотброшенных членов отрицательным или положительным (или же первый из отброшенных членов будет положительным или отрицательным). Ошибка, которую мы совершаем, когда заменяем S через s_n, по абсолютной величине меньше, чем первый из отброшенных членов, и одного знака с ним. Сумма S превосходит любую сумму s_n с четным индексом и меньше, чем любая сумма s_n с нечетным индексом.

В качестве примера рассмотрим ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots.$$

По теореме Лейбница он сходится, так как

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots,$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Если мы захотим приближенно вычислить сумму этого ряда, то, взяв первые n его членов, получим приближенную величину суммы с точностью до $\frac{1}{n+1}$, причем если n четное, то приближение взято по недостатку, а если нечетное, то по избытку. Например, мы можем сказать, что сумма S этого ряда больше $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ и меньше, чем $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Этот пример интересен тем, что показывает нам существование условно сходящихся рядов. В самом деле, мы убедились, что предыдущий ряд сходится; но ряд, составленный из абсолютных величин его членов, есть

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots;$$

это гармонический ряд, и мы знаем, что он расходится.

Рассмотрим другой пример. Пусть дан ряд

$$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots.$$

К этому ряду можно применить теорему Лейбница, но можно и иначе доказать его сходимость: если мы рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов,

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots,$$

то убедимся, что этот ряд сходится; доказать сходимость можно хотя бы применением признака Даламбера (мы уже рассматривали этот ряд в § 10). Поэтому заданный ряд есть абсолютно сходящийся. В противоположность ряду, рассмотренному в предыдущем примере, он сходится очень быстро, т. е. надо взять лишь небольшое число членов, чтобы получить хорошее приближение. Действительно, на основании изложенного выше о знакочередующихся рядах мы можем утверждать, что, взяв вместо суммы ряда сумму его n первых членов, мы совершаем ошибку, не превосходящую абсолютной величины $n+1$-го члена. Например, взяв сумму первых 6 членов, мы совершим ошибку меньшую, чем

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=\frac{1}{5040}.$$

§ 15. О достаточных признаках сходимости рядов.

Мы убедились, что ряд может иногда сходиться не потому, что члены его быстро стремятся к нулю, а лишь благодаря интерференции положительных и отрицательных членов. В этом последнем случае, если только ряд не является знакочередующимся и таким, к которому применима теорема Лейбница, нет никаких общих приемов, позволяющих судить о его сходимости или расходимости: приходится для каждого ряда в отдельности искать те или иные методы решения этого вопроса.

Напротив, для рядов, у которых сходимость вызвана быстрым стремлением к нулю их членов, дело обстоит очень просто: мы убеждаемся в их сходимости благодаря тому, что сходится ряд из абсолютных величин их членов. Например, ряд

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\sin 3\frac{\pi}{4}}{2^2}-\frac{\sin 5\frac{\pi}{4}}{2^3}-\ldots+\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{2^n}+\ldots$$

не является знакочередующимся, так как в нем два первых члена положительны, два следующих отрицательны, затем снова два положительны и т. д. Значит, теорема Лейбница к нему не применима. Но ряд, составленный из абсолютных величин его членов, будет ряд

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{2^2\cdot\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{2^n\cdot\sqrt{2}}+\ldots,$$

который получается из геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$ путем умножения всех членов на $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и, следовательно, сходится, а значит, заданный ряд сходится и притом абсолютно.

Итак, во многих случаях вопрос о сходимости ряда, члены которого как положительны, так и отрицательны, можно свести к вопросу о сходимости ряда с одними только положительными членами. Для большей ясности мы сформулируем некоторые теоремы, позволяющие судить о сходимости ряда и являющиеся простыми следствиями уже известных нам теорем о рядах с положительными членами.

Если члены ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

по абсолютной величине меньше или равны соответствующим членам сходящегося ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где все $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ положительны, то данный ряд сходится, и притом абсолютно. При этом, если S есть сумма ряда из u_n, а σ — сумма ряда из a_n, то $|S| \leqslant \sigma$.

В самом деле, по условию, имеем:

$$|u_n| \leqslant a_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Поэтому ряд с положительными членами

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

на основании принципа сравнения рядов (§ 9) должен сходиться, так как ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ по условию сходится, а это значит, что данный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится абсолютно. Полагая

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$
$$\sigma_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

мы видим, что

$$|S_n| \leqslant |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| \leqslant$$
$$\leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sigma_n \leqslant \sigma,$$

а потому

$$|S| = \left|\lim_{n \to \infty} S_n\right| = \lim_{n \to \infty} |S_n| \leqslant \sigma.$$

Пример. Рассмотрим ряд

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots,$$

где x — любое постоянное число. Так как $|\sin nx| \leqslant 1$, каковы бы ни были n и x, то

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Но ряд

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

есть, как мы знаем, сходящийся, поэтому данный ряд сходится, и притом абсолютно.

Точно так же признаки Даламбера и Коши позволяют нам в некоторых случаях решить вопрос о сходимости ряда, даже когда его члены не положительны. Например, мы можем доказать такие две теоремы:

Если для ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

имеем:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho,$$

причем $\rho < 1$, то ряд сходится, и притом абсолютно; если же $\rho > 1$, то ряд расходится.

Если для ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

имеем:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho,$$

где $\rho < 1$, то ряд сходится, и притом абсолютно; если же $\rho > 1$, то ряд расходится.

В самом деле, если $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$, где $\rho < 1$, то по признаку Даламбера ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

сходится. То же имеет место на основании признака Коши, если

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho, \text{ где } \rho < 1.$$

Поэтому исследуемый ряд в обоих этих случаях есть абсолютно сходящийся.

Чтобы доказать, что ряд расходится при $\rho > 1$, нельзя просто сослаться на то, что в этом случае по признаку Даламбера или Коши ряд, составленный из абсолютных величин, есть расходящийся: может случиться, что изучаемый ряд сходится, но условно. Однако, если

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho, \text{ где } \rho > 1,$$

то, начиная с некоторого p, мы будем всегда иметь:

$$|u_{n+1}| > |u_n|, \qquad n \geqslant p,$$

а это показывает, что члены ряда, начиная с некоторого момента, возрастают по абсолютной величине, и, следовательно, n-й член ряда не может стремиться к нулю при неограниченном возрастании n; значит, ряд должен расходиться.

Аналогично, если $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, где $\rho > 1$, то $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$, начиная с некоторого n, а потому и $|u_n| > 1$, т. е. опять-таки члены ряда не могут стремиться к нулю; значит, он расходится.

З а м е ч а н и е. Иногда приходится встречаться со случаем, когда

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty.$$

В этом случае ряд тоже расходится, так как для всякого M имеем $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > M$, начиная с некоторого значения n. Поэтому, рассуждая дальше так же, как и в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho > 1$, мы убедимся, что ряд расходится. Аналогично убедимся, что ряд расходится, если

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = +\infty.$$

Пример 1. Ряд

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3} + \frac{\cos 3\frac{\pi}{4}}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n} + \ldots$$

сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\cdot 3^n}{\sqrt{2}\cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Пример 2. Ряд

$$\frac{3}{1} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n + \ldots$$

расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right) = 2 > 1.$$

Пример 3. Ряд

$$1 - 2^2 + 3^3 - 4^4 + \ldots + (-1)^{n-1} n^n + \ldots$$

расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

§ 16. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Предположим, что в некотором ряде

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{u}$$

часть членов положительна, а часть отрицательна. Пусть

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots \tag{p}$$

есть ряд, составленный из всех положительных членов ряда (u), а

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n + \ldots \tag{q}$$

есть ряд, составленный из абсолютных величин всех отрицательных членов ряда (u). Докажем следующую теорему:

Если ряд (u) сходится абсолютно, то оба ряда (p) и (q), составленные из его положительных членов и из абсолютных величин его отрицательных членов, сходятся; при этом, если S есть сумма ряда (u), а P и Q соответственно суммы рядов (p) и (q) то $S = P - Q$. Если же ряд (u) сходится условно, то оба ряда (p) и (q) расходятся.

Пусть S_n сумма n первых членов ряда (u). Среди них найдется некоторое количество, например m, положительных и некоторое количество, например k, отрицательных $(n=m+k)$. Обозначая через P_m и Q_k соответственно сумму m первых членов ряда (p) и сумму k первых членов ряда (q), имеем:

$$S_n = P_m - Q_k. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots . \tag{$|u|$}$$

Обозначая через σ_n сумму его n первых членов, замечаем, что

$$\sigma_n = P_m + Q_k. \tag{2}$$

Если ряд (u) сходится абсолютно, значит, ряд $(|u|)$ сходится. Поэтому σ_n стремится к определенному пределу σ при $n \to \infty$, откуда, в силу положительности P_m и Q_k следует, что

$$P_m < \sigma, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

и

$$Q_k < \sigma, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Но если у ряда с положительными членами частные суммы ограничены, то он сходится (§ 9); поэтому оба ряда (p) и (q) сходятся.

Если заставить n стремиться к $+\infty$, то m и k также будут стремиться к $+\infty$ [в противном случае ряд (u) содержал бы лишь конечное число положительных или лишь конечное число отрицательных членов, а тогда доказываемое предложение становится тривиальным].

Поэтому из равенства (1) получаем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty} P_m - \lim_{k\to\infty} Q_k,$$

откуда

$$S = P - Q,$$

что и требовалось доказать.

Если ряд (u) сходится условно, то ряд $(|u|)$ расходится. Так как члены его положительны, то расходимость вызвана тем, что $\sigma_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Из равенств (1) и (2) находим:

$$P_m = \frac{\sigma_n + S_n}{2} \quad \text{и} \quad Q_k = \frac{\sigma_n - S_n}{2};$$

так как, при $n \to +\infty$, $\sigma_n \to +\infty$ и $S_n \to S$, то $P_m \to +\infty$ и $Q_k \to +\infty$, откуда следует, что ряды (p) и (q) расходятся.

Таким образом, на абсолютно сходящийся ряд можно смотреть как на разность двух сходящихся рядов с положительными членами, но для условно сходящихся рядов это уже оказывается неверным.

Например, в условно сходящемся ряде

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

ряды, составленные из его положительных членов

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$$

и из абсолютных величин его отрицательных членов

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots,$$

расходятся. Действительно, второй ряд получается из гармонического, если все члены этого последнего умножить на $\frac{1}{2}$; что же касается первого, то его члены больше соответствующих членов второго ряда, поэтому он тоже расходится.

С только что доказанной теоремой тесным образом связан вопрос о перестановке членов ряда. Докажем следующее важное предложение:

Если ряд сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка его членов, или, другими словами, **два абсолютно сходящихся ряда, отличающихся друг от друга лишь порядком своих членов, имеют одинаковую сумму.**

В самом деле, мы только что доказали, что абсолютно сходящийся ряд можно рассматривать как разность двух рядов с положительными членами. Если мы начнем переставлять каким угодно способом члены ряда, то будут происходить перестановки в этих рядах. Но в § 12 мы видели, что в ряде, все члены которого положительны, можно изменять порядок членов как угодно, не изменяя его суммы. Таким образом, оба рассматриваемых ряда, после перестановки, будут иметь все те же суммы, а значит, и данный ряд, являющийся их разностью, сохранит ту же сумму, равную разности сумм этих рядов.

Этой теоремой можно пользоваться для более удобного вычисления суммы ряда. Например, ряд

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots \quad (1)$$

сходится абсолютно, ибо

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots \quad (2)$$

есть ряд, получаемый из убывающей геометрической прогрессии путем перестановки каждого члена, стоящего на нечетном месте, на соседнее справа четное, и наоборот. Но в рядах с положительными членами переставлять члены можно, и сходимость при этом не нарушится; значит, ряд (2) сходится, а потому ряд (1) сходится абсолютно. Это позволяет нам переставить его члены как угодно, в частности превратить его в ряд

$$-\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots+(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots, \quad (3)$$

а этот ряд есть геометрическая прогрессия со знаменателем $-\frac{1}{2}$ и первым членом $-\frac{1}{2}$. Следовательно, сумма ряда (3), а значит, и ряда (1) есть

$$\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}.$$

Обратим внимание на то, что при доказательстве теоремы мы пользовались абсолютной сходимостью данного ряда. Покажем, что теорема уже не будет верна, если ряд сходится только условно. Другими словами, убедимся, что в условно сходящемся ряде от перестановки членов сумма может измениться. Это можно видеть из следующего примера.

Рассмотрим ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

Мы уже видели (§ 14), что он сходится, но сходится условно. Обозначим через S его сумму. Сделаем теперь в этом ряде следующую перестановку членов: за каждым положительным членом поставим следующие два отрицательных; мы получим ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots, \qquad (4)$$

или, иначе,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots.$$

Выполняя вычитание в каждой скобке, найдем:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots. \qquad (5)$$

Если здесь вынести $\frac{1}{2}$ за скобку, то в скобках получится первоначальный ряд (4), а потому сумма нового ряда (5) равна $\frac{1}{2}S$. Таким образом, благодаря перестановке членов мы уменьшили сумму ряда вдвое.

Не следует думать, что такой на первый взгляд крайне парадоксальный результат получился благодаря тому, что мы специально подобрали „неудачный" ряд. Риман доказал, что свойством изменять свою сумму от перестановки членов обладает любой условно сходящийся ряд. Более того, переставляя соответствующим образом члены условно сходящегося ряда, можно получить любую сумму. Теорема Римана формулируется так:

Если ряд сходится условно, то можно так переставить его члены, чтобы вновь полученный ряд имел любую наперед заданную сумму; можно также добиться того, чтобы новый ряд оказался расходящимся.

Чтобы доказать это, рассмотрим условно сходящийся ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots. \qquad (u)$$

Пусть

$$p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots \qquad (p)$$

есть ряд, составленный из положительных членов ряда (u), и

$$q_1+q_2+\ldots+q_n+\ldots \qquad (q)$$

есть ряд, составленный из абсолютных величин отрицательных членов ряда (u). Мы уже видели, что для ряда, сходящегося условно, оба ряда (p) и (q) расходятся. Пусть M — любое число; докажем, что, подобрав надлежащим образом порядок членов в ряде (u), мы можем добиться того, чтобы его сумма была равна M. Для определенности предположим, что M — положительное число.

Возьмем в ряде (p) столько первых членов, сколько нужно для того, чтобы их сумма превзошла число M. Это всегда возможно, так как ряд (p) расходится, а потому его частные суммы неограниченно возрастают вместе с возрастанием числа их членов. Мы будем заботиться о том, чтобы членов было взято ровно столько, сколько надо, чтобы превзойти M, но не больше. Другими словами, мы возьмем первые k членов в ряде (p), причем

$$p_1+p_2+\ldots+p_k>M,$$

но если бы мы взяли лишь $k-1$ членов, то имели бы еще

$$p_1+p_2+\ldots+p_{k-1}\leqslant M.$$

Возьмем теперь в ряде

$$-q_1-q_2-\ldots-q_n-\ldots \qquad (-q)$$

столько первых членов, пусть это будет m, сколько нужно для того, чтобы, прибавив их к сумме $p_1+p_2+\ldots+p_k$, получить

$$p_1+p_2+\ldots+p_k-q_1-q_2-\ldots-q_m<M.$$

Это всегда возможно, так как частные суммы ряда $(-q)$ неограниченно возрастают по абсолютной величине. При этом мы позаботимся о том, чтобы взять число m минимальным, т. е. чтобы при меньшем числе членов ряда $(-q)$ предыдущее неравенство еще не было выполнено, иначе говоря, чтобы

$$p_1+p_2+\ldots+p_k-q_1-q_2-\ldots-q_{m-1}\geqslant M.$$

После этого снова возьмем в ряде (p) (из которого уже удалены первые k членов) столько членов, сколько нужно, чтобы, добавив их к сумме p_1+p_2+ $+\ldots+p_k-q_1-q_2-\ldots-q_m$, получить число, превосходящее M, причем позаботимся, как и в первый раз, о том, чтобы для этого было взято не больше членов, чем нужно для выполнения этого неравенства. Допустим, что этих членов l, тогда

$$p_1+p_2+\ldots+p_k-q_1-q_2-\ldots-q_m+p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots+p_{k+l}>M,$$

но

$$p_1+p_2+\ldots+p_k-q_1-q_2-\ldots-q_m+p_{k+1}+p_{k+2}+\ldots+p_{k+l-1}\leqslant M.$$

Теперь снова будем брать из ряда $(-q)$ столько членов, сколько нужно, чтобы добавление их к сумме $p_1+p_2+\ldots+p_k-q_1-q_2-\ldots-q_m+p_{k+1}+$ $+p_{k+2}+\ldots+p_{k+l}$ заставило эту сумму стать $<M$, и т. д.

Мы будем попеременно брать члены из ряда (p) и из ряда $(-q)$, заботясь каждый раз, чтобы: 1) не употреблять членов, которые уже были взяты; 2) брать ровно столько членов, сколько нужно, чтобы получить искомое неравенство, но не больше.

Процесс построения установлен. Докажем, что построенный ряд сходится и имеет своей суммой заданное число M. В самом деле, если σ_n есть сумма n первых членов построенного нами ряда, то разность σ_n-M бесконечно много раз меняет знак; в тех случаях, когда она положительна, она меньше, чем последний положительный член, содержащийся в сумме σ_n, так как, если бы этого не было, это показывало бы, что мы взяли подряд слишком много положительных членов; если же разность σ_n-M отрицательна, то ее абсолютная величина меньше, чем абсолютная величина последнего отрицательного числа, содержащегося в σ_n. Но так как члены рядов (p) и $(-q)$ стремятся к нулю по мере возрастания их индекса, потому что они являются членами ряда (u), сходящегося по условию, то с возрастанием n абсолютная величина σ_n-M будет стремиться к нулю, а это показывает, что ряд сходится и имеет число M своей суммой.

Точно так же можно было бы заставить ряд расходиться. Для этого достаточно взять в ряде (p) столько членов, сколько надо, чтобы их сумма превзошла 1, потом взять один член из ряда $(-q)$, затем в ряде (p) столько членов, чтобы, добавив их к уже полученной сумме, получить результат, превосходящий 2, затем взять один член из ряда $(-q)$ и т. д. В ряде (p) надо брать столько членов, сколько необходимо, чтобы превзойти n, где n последовательно будет пробегать все целые значения. Ясно, что полученный ряд будет расходящимся, так как можно найти такие значения $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, для которых $s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots, s_{n_k}, \ldots$ неограниченно возрастают, а потому не стремятся ни к какому конечному пределу.

Для лучшего понимания метода, которым доказана теорема Римана, рассмотрим конкретный пример. Допустим, что требуется в ряде

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

так переставить члены, чтобы сумма его оказалась равной числу $\frac{5}{4}$.

Покажем несколько начальных шагов того процесса, при помощи которого мы добьемся цели. Для этого рассмотрим два ряда:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots \tag{6}$$

и

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\ldots-\frac{1}{2n}-\ldots, \tag{7}$$

составленные из одних положительных и одних отрицательных членов данного ряда В ряде (6) надо взять два первых члена, так как если бы взяли только один член, то получили бы 1, что меньше $\frac{5}{4}$, сумма же двух первых членов есть $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}>\frac{5}{4}$. Не надо брать большего числа членов, так как двух уже достаточно для того, чтобы получить сумму, превосходящую $\frac{5}{4}$. Итак, два первых члена ряда, который мы строим, дадут

$$1+\frac{1}{3}.$$

Возьмем теперь в ряде (7) сначала один член; тогда

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}<\frac{5}{4};$$

значит, одного члена достаточно, чтобы сумма была уже меньше $\frac{5}{4}$. Возьмем снова из ряда (1) члены, начиная с $\frac{1}{5}$. Так как прибавление только $\frac{1}{5}$ еще не дает числа, превосходящего $\frac{5}{4}$, ибо $\frac{5}{6}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$, то добавим еще $\frac{1}{7}$ тогда получим:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{247}{210};$$

но и это все еще $<\frac{5}{4}$; добавим еще $\frac{1}{9}$; так как

$$\frac{247}{210}+\frac{1}{9}=\frac{811}{630}>\frac{5}{4},$$

то больше положительных членов брать не будем.

Теперь снова начнем добавлять отрицательные члены. Достаточно добавить только член $-\frac{1}{4}$, так как тогда уже имеем:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}<\frac{5}{4}.$$

Принцип построения ряда ясен.

§ 17. Арифметические операции над рядами.

В § 6 мы видели, что если два ряда

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \tag{1}$$
$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{2}$$

сходятся, то сходятся и ряды:

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots, \tag{3}$$
$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\ldots+(u_n-v_n)+\ldots, \tag{4}$$

причем сумма ряда (3) есть $U+V$, сумма ряда (4) есть $U-V$, где U и V — суммы рядов (1) и (2). Теперь, когда введено понятие абсолютной сходимости, эту теорему можно дополнить так:

Если ряды (1) и (2) сходятся абсолютно, то и ряды (3) и (4) сходятся абсолютно.

В самом деле, мы имеем:

$$|u_n+v_n| \leqslant |u_n|+|v_n|, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

и также

$$|u_n-v_n| \leqslant |u_n|+|v_n|, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Но так как ряды (1) и (2) по условию абсолютно сходятся, то ряд

$$|u_1|+|v_1|+\ldots+|u_n|+|v_n|+\ldots$$

есть сходящийся, откуда и следует абсолютная сходимость рядов (3) и (4).

Теперь изучим для абсолютно сходящихся рядов новую операцию — операцию умножения.

При умножении двух многочленов надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и результаты сложить. По аналогии с этим можно перемножать ряды. „Произведением" двух рядов естественно назвать такой ряд, который получится, если каждый член одного ряда умножить на каждый член другого ряда и из полученных произведений составить ряд. Но, для того чтобы не производить эти действия бессистемно, что привело бы к невозможности установить закон составления членов нового ряда, поступим так. Пусть

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (u)$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \qquad (v)$$

два данных ряда. Положим:

$$w_1=u_1v_1,\ \ w_2=u_1v_2+u_2v_1,\ \ w_3=u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1$$

и вообще

$$w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+u_3v_{n-2}+\ldots+u_nv_1$$

и рассмотрим ряд

$$w_1+w_2+\ldots+w_n+\ldots. \qquad (w)$$

Ряд (w) назовем *произведением* рядов (u) и (v).

Для абсолютно сходящихся рядов имеем теорему:

Если ряды (u) и (v) сходятся абсолютно, то и их произведение есть абсолютно сходящийся ряд, причем сумма W этого ряда равна произведению UV сумм U и V рядов (u) и (v).

Для доказательства обозначим через U_n, V_n и W_n соответственно суммы n первых членов рядов (u), (v) и (w). Заметим, что w_n содержит произведение любых двух членов рядов (u) и (v), у которых сумма индексов равна $n+1$. Поэтому сумма W_n первых n членов ряда (w) содержит произведение любых двух членов рядов (u) и (v), у которых сумма индексов меньше или равна $n+1$. Но если бы мы рассмотрели произведение U_nV_n, то нашли бы, что оно содержит как все эти члены, так и еще другие, у которых сумма индексов превосходит $n+1$ (но не больше $2n$). Но, с другой стороны, если дано целое число p, то можно взять настолько большое n, что все произведения, входящие в U_pV_p, будут фигурировать также в W_n; для этого достаточно взять $n+1>2p$.

Установив это, предположим сначала, что все u_n и v_n положительны; тогда будут положительными и все W_n; в силу предыдущих замечаний будем иметь:

$$W_n<U_nV_n.$$

Но так как U_n стремится к U, возрастая, и V_n стремится к V, возрастая, то $U_nV_n<UV$, а потому

$$W_n<UV.$$

Отсюда следует, что частные суммы ряда (w) ограничены, а потому ряд (w) сходится, и его сумма $W\leqslant UV$. Остается доказать, что она не может быть $<UV$.

Для этого заметим, что так как U_nV_n стремится к UV, то можно выбрать столь большое p, что

$$U_pV_p>UV-\varepsilon,$$

где ε — как угодно малое положительное число. Но при $n+1>2p$

$$W_n>U_pV_p>UV-\varepsilon;$$

поэтому

$$W_n>UV-\varepsilon,$$

а так как ε как угодно мало, то предел W_n не может быть $<UV$. Итак,

$$W=UV.$$

Следовательно, для случая, когда члены рядов (u) и (v) положительны, теорема доказана. Предположим теперь, что члены рядов (u) и (v) имеют любые знаки. Но так как ряды (u) и (v), по условию, сходятся абсолютно, то ряды

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots,$$
$$|v_1|+|v_2|+\ldots+|v_n|+\ldots$$

являются сходящимися рядами с положительными членами; пусть U' и V' — их суммы и U'_n, V'_n — суммы n первых членов этих рядов.

Если мы составим ряд

$$w'_1+w'_2+\ldots+w'_n+\ldots, \qquad (w')$$

где

$$w'_n=|u_1||v_n|+|u_2||v_{n-1}|+\ldots+|u_n||v_1|,$$

то в силу только что доказанной теоремы этот ряд сходится, и сумма его $W'=U'V'$. Обозначим через W'_n сумму первых n членов этого ряда. Но ясно, что $|W_n|\leqslant W'_n$, потому что абсолютная величина суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых; поэтому из сходимости ряда (w') следует, что ряд (w) сходится абсолютно. Остается доказать, что его сумма равна произведению UV.

Рассмотрим выражение $U_nV_n-W_n$. В него входят все те члены произведения U_nV_n, которые не встречаются в W_n, т. е. члены вида U_kV_i, где $k+i>n+1$, но $k+i\leqslant 2n$. Ясно поэтому, что выражение

$U'_nV'_n - W'_n$ получается из $U_nV_n - W_n$, если все числа u_1, $u_2, \ldots$, v_1, $v_2, \ldots$ заменить их абсолютными величинами. Поэтому

$$|U_nV_n - W_n| \leqslant U'_nV'_n - W'_n,$$

так как и в этом случае применима теорема: абсолютная величина суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых. Но когда n неограниченно возрастает, то U'_n и V'_n, стремятся к U' и V', а W'_n стремится к W', причем $W' = U'V'$; поэтому $U'_nV'_n - W'_n$ стремится к нулю. Отсюда следует, что

$$|UV - W| \leqslant 0;$$

но так как модуль всякого числа либо положителен, либо равен нулю, то $UV = W$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример. Пусть требуется перемножить ряды

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$
$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}x^n + \ldots,$$

где x — некоторое постоянное число, такое, что $|x| < 1$.

Так как каждый из рассматриваемых рядов есть геометрическая прогрессия, то из $|x| < 1$ следует их абсолютная сходимость. Составим по указанному выше правилу члены ряда, являющегося произведением этих двух рядов:

$$w_1 = 1 \cdot 1 = 1,$$
$$w_2 = 1 \cdot (-x) + x \cdot 1 = -x + x = 0,$$
$$w_3 = 1 \cdot x^2 + x \cdot (-x) + x^2 \cdot 1 = x^2 - x^2 + x^2 = x^2,$$
$$w_4 = 1 \cdot (-x^3) + x \cdot x^2 + x^2(-x) + x^3 \cdot 1 = -x^3 + x^3 - x^3 + x^3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_{2n-1} = 1 \cdot x^{2n-2} + x(-x^{2n-3}) + x^2(x^{2n-4}) + \ldots + x^{2n-2} \cdot 1 = x^{2n-2}.$$

(w_{2n-1} имеет $2n - 1$, т. е. нечетное число членов, каждый из них равен либо x^{2n-2}, либо $-x^{2n-2}$, и притом знаки чередуются; поэтому все члены попарно сокращаются, кроме одного, а это и дает $w_{2n-1} = x^{2n-2}$);

$$w_{2n} = 1 \cdot (-x^{2n-1}) + x \cdot x^{2n-2} + x^2(-x^{2n-3}) + \ldots + x^{2n-1} \cdot 1 = 0$$

(w_{2n} имеет $2n$, т. е. четное число членов, каждый из них равен либо $-x^{2n-1}$, либо x^{2n-1}, и знаки чередуются).

Произведение наших рядов есть ряд

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots.$$

Из общей теории мы знаем, что этот ряд должен сходиться абсолютно при $|x| < 1$ и что его сумма должна быть равна произведению сумм заданных рядов. На данном примере это легко проверить. В самом деле, первый ряд есть геометрическая прогрессия со знаменателем x и первым членом 1; поэтому его сумма равна $\frac{1}{1-x}$. Второй ряд есть геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем $-x$; поэтому его сумма равна $\frac{1}{1+x}$. Значит, произведение должно иметь сумму:

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Но произведение это само есть геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем x^2. Так как $|x|<1$, то $|x^2|<1$, откуда видно, что этот ряд действительно абсолютно сходится, и по формуле для суммы геометрической прогрессии его сумма действительно равна $\frac{1}{1-x^2}$.

Покажем теперь на примере, что теорема об умножении рядов уже не может быть применена к *условно* сходящимся рядам. Для этого покажем, что произведение двух условно сходящихся рядов может расходиться.

Возьмем ряд

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

и возведем его в квадрат, т. е. умножим на самого себя; получим:

$$w_n=1\cdot\left[(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left[(-1)^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right]+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left[(-1)^{n-3}\frac{1}{\sqrt{n-2}}\right]+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot 1;$$

поэтому

$$|w_n|=1\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot 1.$$

Нетрудно доказать, что это выражение не стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. В самом деле, в этой сумме n слагаемых, причем каждое из них имеет вид $\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}$, где k пробегает значения от 1 до n. Выражение $x(n-x+1)$ достигает своего максимума при $x=\frac{n+1}{2}$, откуда ясно, что при n нечетном наименьшим из слагаемых будет член:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-\frac{n+1}{2}+1}}=\frac{2}{n+1},$$

а при n четном таких слагаемых будет два, а именно:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-\frac{n}{2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-\left(\frac{n}{2}+1\right)+1}}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{n(n+2)}}>\frac{2}{n+2}.$$

Отсюда следует, что при любом n имеем:

$$|w_n|>n\cdot\frac{2}{n+2};$$

следовательно, w_n не стремится к нулю при неограниченном возрастании n, а значит, ряд расходится.

Остается рассмотреть еще одну операцию, а именно *деление* рядов. Разделить ряд

$$w_1+w_2+\ldots+w_n+\ldots \qquad (w)$$

на ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u)$$

значит найти такой ряд

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots, \qquad (v)$$

чтобы произведение рядов (u) и (v) составило ряд (w).

Но если ряд (w) является таким произведением, то

$$w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1.$$

Отсюда следует, что если можно будет найти такие числа $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$, что

$$\begin{gathered} u_1v_1=w_1, \\ u_1v_2+u_2v_1=w_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1=w_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

где числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ и $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ известны, то ряд (v) можно рассматривать как частное от деления ряда (w) на ряд (u). При этом, если ряды (w) и (u) были абсолютно сходящимися и если найденный ряд (v) окажется тоже абсолютно сходящимся, то можно утверждать, что его сумма есть частное от деления суммы ряда (w) на сумму ряда (u). Это — непосредственное следствие ранее доказанной теоремы об умножении рядов.

Покажем на примере, как находить частное от деления двух рядов. Для этого будем делить ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

на ряд

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}+\ldots.$$

Оба ряда абсолютно сходящиеся. Чтобы найти члены $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ ряда, получающегося в результате деления, мы пишем:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}v_1=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}v_2-\frac{1}{2^2}v_1=\frac{1}{2^2}, \\ \frac{1}{2}v_3-\frac{1}{2^2}v_2+\frac{1}{2^3}v_1=\frac{1}{2^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}v_n-\frac{1}{2^2}v_{n-1}+\frac{1}{2^3}v_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}v_1=\frac{1}{2^n}. \end{gathered}$$

Первое из этих равенств дает $v_1=1$. Подставляя этот результат во второе равенство, найдем $v_2=1$. Подставляя v_1 и v_2 в третье равенство, найдем $v_3=\frac{1}{2}$. Четвертое равенство

$$\frac{1}{2}v_4-\frac{1}{2^2}v_3+\frac{1}{2^3}v_2-\frac{1}{2^4}v_1=\frac{1}{2^4}$$

дает $v_4=\frac{1}{2^2}$.

Намечается такой закон составления членов ряда:

$$v_n=\frac{1}{2^{n-2}} \text{ для } n=2,\ 3,\ 4,\ldots.$$

Проверим, верно ли указан закон; мы убедились, что он верен для $n=2$, 3, 4; предположив, что он верен для любого целого n, не превосходящего

$m-1$, покажем, что он верен и для $n=m$. Но

$$\frac{1}{2}v_m-\frac{1}{2^2}v_{m-1}+\frac{1}{2^3}v_{m-2}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{1}{2m}v_1=\frac{1}{2m},$$

и если

$$v_n=\frac{1}{2^{n-2}} \text{ для } n=2, 3, \ldots, m-1,$$

то имеем:

$$\frac{1}{2}v_m-\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^{m-3}}+\frac{1}{2^3}\frac{1}{2^{m-4}}-\ldots+(-1)^{m-2}\frac{1}{2^{m-1}}+(-1)^{m-1}\frac{1}{2m}=\frac{1}{2m},$$

или

$$\frac{1}{2}v_m=\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{1}{2^{m-1}}+(-1)^m\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}.$$

Когда m четное, то слагаемые, кроме двух последних, попарно уничтожаются, два последних дают $\frac{2}{2m}=\frac{1}{2m-1}$, а потому

$$\frac{1}{2}v_m=\frac{1}{2^{m-1}},\quad v_m=\frac{1}{2^{m-2}}.$$

Если же m нечетное, то слагаемые, кроме первого, попарно уничтожаются; поэтому

$$\frac{1}{2}v_m=\frac{1}{2^{m-1}},\quad v_m=\frac{1}{2^{m-2}}.$$

Итак, подмеченный нами закон правилен. Ряд, получившийся от деления, имеет вид:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots.$$

Он сходится абсолютно и его сумма равна 1 плюс сумма прогрессии

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots,$$

откуда следует, что его сумма равна 3.

Но ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$$

имел сумму 1, а ряд

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}+\ldots$$

имел сумму $\frac{1}{3}$, а потому частное от их деления, согласно общей теории должно иметь сумму, равную 3, в чем мы и убедились непосредственно.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

§ 18. Последовательности функций.

В § 1 мы рассматривали последовательности, образованные из чисел. Не менее важным для анализа является понятие последовательности функций. *Если, в силу некоторого закона, у нас образуются последовательно первая, вторая, третья, ... функции таким образом, что каждому целому числу n соответствует одна и только одна функция $f_n(x)$, то мы говорим, что функции*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{f}$$

образуют бесконечную последовательность.

Например, целые степени переменного x

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

образуют бесконечную последовательность; здесь $f_n(x)=x^n$.

Полагая $f_n(x)=\sin nx$, получим последовательность

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \ldots.$$

Полагая $f_n(x)=(-1)^n\dfrac{1}{(x+1)^n}$, получим последовательность

$$-\frac{1}{x+1},\ \frac{1}{(x+1)^2},\ -\frac{1}{(x+1)^3},\ \ldots,\ (-1)^n\frac{1}{(x+1)^n},\ \ldots.$$

Рассмотрим некоторое определенное значение переменного x, например, x_0. Если мы вычислим значения функций последовательности (f) для $x=x_0$, то получим бесконечную последовательность, образованную из чисел:

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0),\ \ldots,\ f_n(x_0),\ \ldots.$$

Если эта последовательность имеет пределом некоторое число A или, как мы ранее условились говорить, сходится к A, мы скажем, что заданная *последовательность функций (f) имеет пределом A при $x=x_0$*, или *сходится к A при $x=x_0$*, или, наконец, *сходится к A в точке x_0*.

Если последовательность функций сходится во всех точках некоторого отрезка (a, b), мы будем говорить, что она *сходится на отрезке* (a, b). Функцию $f(x)$ назовем *пределом последовательности* (f) на отрезке (a, b) и будем писать:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x), \qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

если для всякого значения x_0 на этом отрезке число $f(x_0)$ является пределом последовательности чисел $f_1(x_0)$, $f_2(x_0)$, ..., $f_n(x_0)$, ... Иногда $f(x)$ называют *предельной функцией* для последовательности (f); говорят также, что *последовательность* (f) *сходится к функции* $f(x)$.

Например, если мы рассмотрим последовательность функций

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots,$$

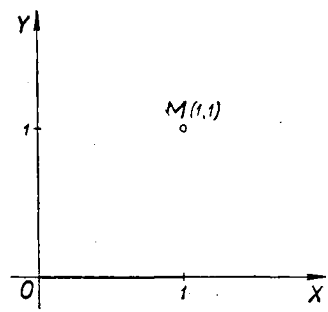
то для $0 \leqslant x_0 < 1$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} x_0^n = 0$, тогда как для $x = 1$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$, а потому мы можем написать:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

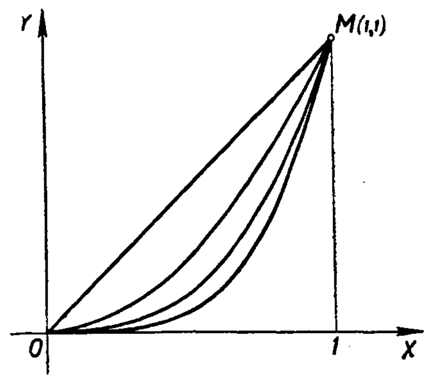
если обозначить через $f(x)$ функцию, которая удовлетворяет условиям:

$$f(x) = 0, \qquad 0 \leqslant x < 1,$$
$$f(1) = 1.$$

Эту функцию можно представить геометрически, как кусок оси абсцисс между 0 и 1 и одну „оторвавшуюся" точку M (1,1) (черт. 6). Функции x^n изображены на чертеже 7; это непрерывные кривые, проходящие через начало координат и точку M (1,1); по мере увели-



Черт. 6.



Черт. 7.

чения n для всякого x, кроме $x = 1$, ординаты наших кривых все ближе и ближе подходят к оси абсцисс, изображающей предельную функцию $f(x)$ для $x \neq 1$. Для $x = 1$ ординаты наших кривых даже все время совпадают с величиной $f(1)$ предельной функции $f(x)$ в точке $x = 1$.

Подобно тому как для чисел, если $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, можно рассматривать a_n, как приближенную величину для A, точно так же и для функций, если $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, можно рассматривать функцию $f_n(x)$, как приближенно изображающую функцию $f(x)$. Часто у нас и нет другого способа вычислить значения $f(x)$, кроме как, рассматривая ее как предел некоторой последовательности функций. Именно так и находят значения e^x, $\sin x$, $\cos x$ и т. п. для любого значения аргумента x.

§ 19. Понятие о функциональном ряде и его сходимости.

Функциональным рядом называется выражение вида

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots;$$

такой ряд получается из последовательности функций, если мы члены этой последовательности соединим знаком плюс. Так же, как и для числовых рядов, здесь прежде всего возникает вопрос, какой смысл придавать этому „сложению“ бесконечного количества слагаемых. Для числовых рядов мы поступали так: брали сумму n первых членов ряда и исследовали, стремится ли она к определенному пределу, когда n неограниченно возрастает; если да, то мы называли ряд сходящимся и предел этой суммы называли суммой ряда. Иначе говоря, операцию бесконечного складывания мы понимали так: складывается конечное число слагаемых и берется предел (если он существует) этой суммы, предполагая число слагаемых неограниченно возрастающим.

Для рядов функциональных мы будем поступать аналогично. Рассмотрим сумму n первых членов ряда; так как каждый член есть функция от x, то и сумма их — функция от x; обозначим ее через $s_n(x)$, т. е. положим

$$s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x).$$

Функцию $s_n(x)$, как и для числовых рядов, будем называть n-й частной суммой ряда. *Если, для некоторого значения x, последовательность частных сумм*

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots$$

сходится, то мы назовем функциональный ряд сходящимся для этого значения x; предел $s(x)$ последовательности функций $s_n(x)$ назовем суммой ряда и будем писать:

$$s(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots.$$

Если ряд сходится для всех значений x на некотором отрезке (a, b), мы будем говорить, что он *сходится на отрезке* (a, b). Ясно из самого определения, что если ряд сходится на отрезке (a, b), то, каково бы ни было x_0, $a\leqslant x_0\leqslant b$, числовой ряд

$$f_1(x_0)+f_2(x_0)+\ldots+f_n(x_0)+\ldots$$

сходится, и обратно, из сходимости таких числовых рядов для всех x_0, $a\leqslant x_0\leqslant b$, следует сходимость функционального ряда на (a, b).

Например, если мы рассмотрим ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

и будем предполагать, что x пробегает некоторый отрезок $(-r, +r)$, где $r<1$, то для каждого значения x на этом отрезке ряд, будучи убывающей геометрической прогрессией, сходится; его сумма для заданного x есть $\frac{1}{1-x}$. Заставляя x изменяться от $-r$ до $+r$, можем сказать, что наш функциональный ряд сходится на отрезке $(-r, +r)$ к функции $\frac{1}{1-x}$, и можем писать:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots.$$

Про некоторую функцию $F(x)$ мы условимся говорить, что она разложена в ряд на отрезке (a, b), если существует функциональный ряд, который сходится в данном отрезке и имеет $F(x)$ своей суммой. Проблема разложения функций в ряды есть одна из важнейших проблем анализа. Не уточняя пока вопроса, укажем только на то, что если $F(x)$ есть сумма некоторого ряда на отрезке (a, b), то для всякого значения x на (a, b) можно вычислить величину $F(x)$ как угодно точно, взяв достаточно большое число членов ряда. Поэтому ряды служат для приближенного вычисления величин функций, значения которых мы в некоторых случаях и не можем найти никаким другим способом. Впоследствии мы покажем, что именно теория рядов позволила составить таблицы логарифмов, а также натуральных величин тригонометрических функций. Сейчас мы будем изучать некоторые общие свойства функциональных рядов, а затем перейдем к рядам специального вида и уже тогда поставим вопрос о том, как найти разложение данной функции в ряд, удобный для приближенного вычисления ее значений.

§ 20. О различных видах сходимости последовательности функций.

Рассмотрим последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots,$$

сходящуюся на некотором отрезке (a, b) к функции $f(x)$. По определению (§ 18), это значит, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

или, другими словами, для всякого значения x на данном отрезке число $f(x)$ есть предел чисел $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$. Но сказать, что пределом чисел $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$ является число $f(x)$, это значит сказать, что разность $f(x) - f_n(x)$ стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Полагая

$$R_n(x) = f(x) - f_n(x),$$

мы, следовательно, можем утверждать, что равенство

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

эквивалентно равенству

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

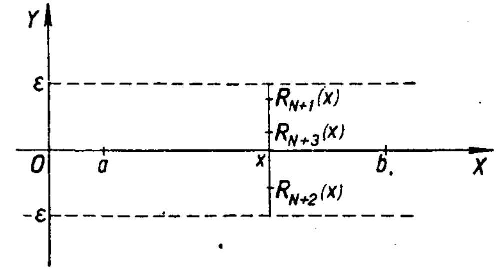
Другими словами, для всякого значения x на отрезке (a, b) мы можем утверждать, что, как только ε задано, неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ может быть удовлетворено, если только n взято достаточно большим; или, выражаясь точнее, для всякого значения x на (a, b), как только ε задано, найдется такое целое число N, что при этом значении x и при любом $n > N$ мы имеем $|R_n(x)| < \varepsilon$. Геометрически это значит, что когда задана точка x на отрезке (a, b), то для любого ε найдется такое N, что значение $R_n(x)$ для $n > N$ изобразится точкой, лежащей на перпендикуляре к оси абсцисс, проведенном в точке x, и отстоящей от оси абсцисс меньше, чем на ε; иначе говоря, все ординаты $R_{N+1}(x)$,

$R_{N+2}(x), \ldots$ уложатся на отрезке, перпендикулярном к оси OX, имеющем точку x своим центром и длину, равную 2ε (черт. 8).

Если не вдуматься в дело глубже, то можно было бы притти к такому выводу. Так как наше рассуждение справедливо для *каждой* точки x на отрезке (a, b), то, изображая не одну точку кривой, а всю кривую $R_n(x)$, мы увидим, что все кривые

$$R_{N+1}(x),\ R_{N+2}(x), \ldots$$

целиком лежат внутри полосы ширины 2ε около отрезка (a, b) оси абсцисс (черт. 9).



Черт. 8.

Например, рассмотрим последовательность

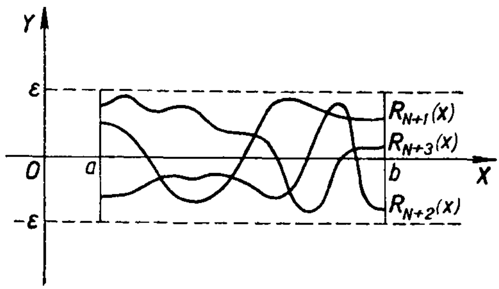
$$\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin x}{2}, \ldots, \frac{\sin x}{n}, \ldots.$$

Для простоты будем ее рассматривать на отрезке $(0, 2\pi)$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x}{n} = 0$, так как $|\sin x| \leqslant 1$ для любого x. В нашем случае

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$$

и

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0;$$

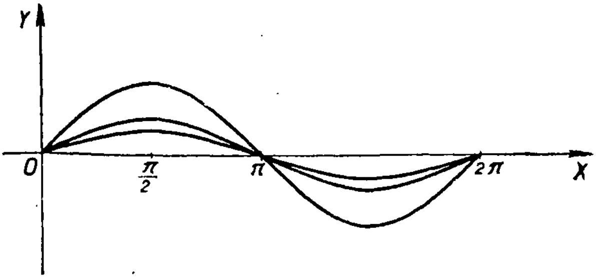


Черт. 9.

поэтому

$$R_n(x) = f(x) - f_n(x) = -f_n(x),$$

$$|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{\sin x}{n}\right|,$$



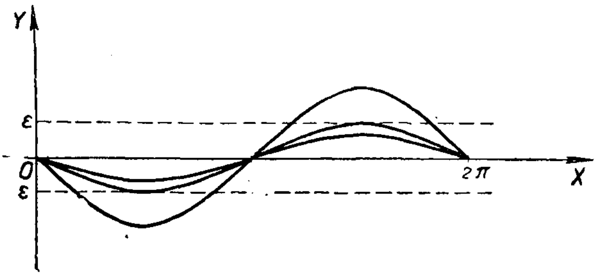
Черт. 10.

а так как $|\sin x| \leqslant 1$ при любом x, то

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Отсюда ясно, что как только ε задано, то, взяв N настолько большим, чтобы $\frac{1}{N} < \varepsilon$, мы можем быть уверены, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$ для всякого $n > N$, а стало быть и $|R_n(x)| < \varepsilon$ для всякого $n > N$ и для любого x на $(0, 2\pi)$.

Чертеж 10 показывает, что кривые $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$ на всем своем протяжении на $(0, 2\pi)$ по мере увеличения n все ближе и ближе подходят к оси обсцисс, а кривые $R_n(x)$ (черт. 11), получающиеся из них зеркальным отображением в оси абсцисс [так как $R_n(x) = -f_n(x)$], ведут себя так, что, какое бы малое ε мы ни взяли, найдется такое целое N, что все кривые $R_{N+1}(x)$, $R_{N+2}(x)$, ... на всем отрезке $(0, 2\pi)$ не будут выходить из полосы ширины 2ε.



Черт. 11.

Было бы однако чрезвычайно неосторожно из рассмотрения этого и ему подобных примеров заключить о том, что кривая $R_n(x)$ *всегда* лежит целиком внутри полосы ширины 2ε около оси абсцисс, если только n достаточно велико. Чтобы убедиться в незаконности подобного заключения, рассмотрим такой пример. Дана последовательность

$$x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots,$$

уже рассмотренная нами в § 18. Здесь $f_n(x) = x^n$, и если ограничиться рассмотрением отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$, то она сходится, причем, полагая

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

имеем:

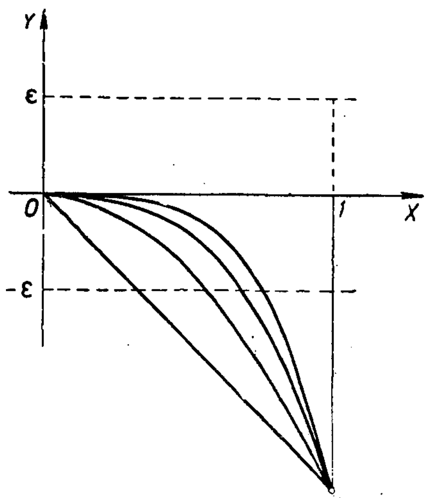
$$f(x) = 0, \qquad 0 \leqslant x < 1$$

и

$$f(1) = 1.$$

Отсюда следует, что для $R_n(x) = f(x) - f_n(x)$ имеем:

$$R_n(x) = -f_n(x) = -x^n,\ 0 \leqslant x < 1,$$
$$R_n(1) = 1 - 1^n = 1 - 1 = 0.$$



Черт. 12.

Кривые $R_n(x)$ изображены на чертеже 12. Для значений x таких, что $0 \leqslant x < 1$, они получаются из кривых чертежа 7 путем зеркального отображения в оси абсцисс, но в точке $x = 1$, вместо того, чтобы равняться -1, как это было бы, если бы и в этой точке $R_n(x) = -x^n$, они становятся равными нулю. Таким образом эти кривые разрывны.

Из чертежа ясно, что, взяв полосу ширины 2ε около отрезка $(0,1)$, мы, сколько бы ни увеличивали число N, никогда не добьемся того, чтобы кривая $R_n(x)$ для $n > N$ не выходила из этой полосы. Правда, с возрастанием индекса n кривые начинают выходить из указанной полосы все дальше и дальше от точки 0 (или все ближе и ближе к точке 1), но во всяком случае это с каждой из таких кривых непременно происходит. Аналитически в этом легко убедиться так: для того чтобы неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

или

$$|-x^n| = x^n < \varepsilon$$

имело место для данного значения n, надо, чтобы $x < \sqrt[n]{\varepsilon}$. И как только x станет $\geqslant \sqrt[n]{\varepsilon}$, так кривая $R_n(x)$ выйдет из полосы. Это обязательно случится внутри отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$, так как, если только $\varepsilon < 1$, то и $\sqrt[n]{\varepsilon}$ тоже < 1.

Если мы спросим себя, почему в этом примере нельзя, как это было в предыдущем примере, коль скоро ε задано, найти такое N, что $|R_n(x)| < \varepsilon$ для всякого $n > N$ и для всех значений x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, то и на это легко дать ответ. Действительно, если бы для некоторого n мы имели для всех x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $|R_n(x)| < \varepsilon$, то это значило бы, что

$$x^n < \varepsilon$$

для этого n и для всех x, $0 \leqslant x < 1$. Но тогда, логарифмируя это равенство, мы нашли бы:

$$n \lg x < \lg \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon < 1$ и $x < 1$, то $\lg x$ и $\lg \varepsilon$ отрицательны; значит, $-\lg x = |\lg x|$ и $-\lg \varepsilon = |\lg \varepsilon|$. Умножая неравенство на -1, мы меняем его смысл; поэтому

$$-n \lg x > -\lg \varepsilon,$$

или

$$n |\lg x| > |\lg \varepsilon|,$$

откуда

$$n > \frac{|\lg \varepsilon|}{|\lg x|}.$$

Таким образом, если бы неравенство $x^n < \varepsilon$ было справедливо для какого-нибудь n и для всех x, $0 \leqslant x < 1$, то мы имели бы для этого n неравенство

$$n > \frac{|\lg \varepsilon|}{|\lg x|}, \qquad 0 \leqslant x < 1.$$

Но это невозможно, так как при $x \to 1$, $\lg x \to 0$; поэтому у дроби, стоящей в правой части неравенства, числитель постоянный, а знаменатель можно сделать как угодно малым, если только взять x достаточно близким к 1; следовательно, всю дробь можно сделать как угодно большой, а потому она не может стать меньше некоторого *фиксированного* числа n. Это и показывает, что какое бы большое число n мы ни взяли, нельзя удовлетворить неравенству $|R_n(x)| < \varepsilon$ для *всех* x на нашем отрезке.

§ 21. Равномерная сходимость последовательности.

Мы уже видели в предыдущем параграфе, что у последовательности функций могут наблюдаться различные виды сходимости, т. е. кривые $f_n(x)$ могут различным образом приближаться к предельной кривой

$f(x)$. Но до сих пор мы ограничивались лишь примерами; введем теперь одно общее определение, которым придется часто пользоваться в дальнейшем.

Последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ {}_nf(x), \ldots,$$

сходящуюся к функции $f(x)$ на некотором отрезке (a, b), назовем *равномерно сходящейся* на этом отрезке, если для всякого ε найдется такое N, что неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

справедливо для всех $n > N$ и *для всех* x, на (a, b).

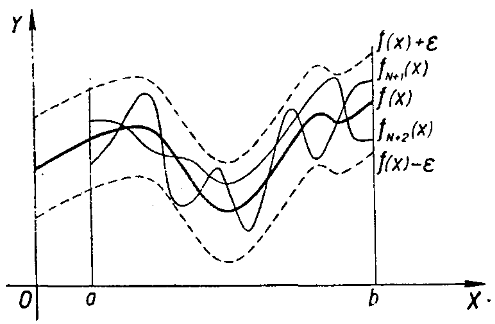
Так как неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ можно переписать в виде:

$$-\varepsilon < f(x) - f_n(x) < \varepsilon,$$

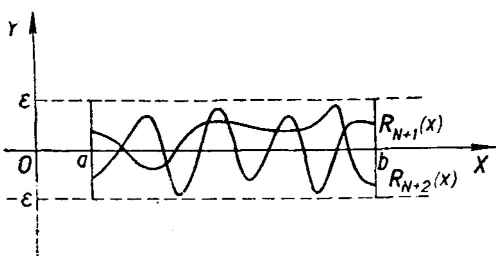
или

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon,$$

то геометрически наше определение равномерной сходимости интерпретируется так: как бы мало ни было ε, найдется такое целое N, что все кривые $f_{N+1}(x)$, $f_{N+2}(x), \ldots$ на всяком протяжении от a до b не будут выходить из полосы ширины 2ε, построенной около предельной кривой $y = f(x)$ (черт. 13). Или, обозначая, как мы и раньше делали, через $R_n(x)$ разность $R_n(x) = f(x) - f_n(x)$, можно сказать, что кривые $R_{N+1}(x)$, $R_{N+2}(x), \ldots$ целиком лежат внутри полосы ширины 2ε около отрезка (a, b) (черт. 14).



Черт. 13.



Черт. 14.

Примером равномерно сходящейся последовательности может служить рассмотренная в предыдущем параграфе последовательность

$$\frac{\sin x}{1}, \quad \frac{\sin x}{2}, \ldots, \quad \frac{\sin x}{n}, \ldots.$$

Мы видели, что если взять N таким, чтобы $\frac{1}{N} < \varepsilon$, то будем иметь $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ для $n > N$ и для всякого x; значит, последовательность сходится равномерно на любом отрезке. На чертеже 10 кривые, изображающие члены этой последовательности, изображены на отрезке $(0, 2\pi)$; при n достаточно большом кривые $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$ не выходят из полосы ширины 2ε около оси абсцисс, которая изображает предельную функцию $f(x) = 0$.

Другим примером равномерно сходящейся последовательности может служить последовательность

$$x,\ x^2,\ x^3, \dots,\ x^n, \dots,$$

если рассматривать ее не на всем отрезке $(0,1)$, на котором мы изучали ее поведение в предыдущем параграфе, а на некотором более коротком отрезке, например на $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Действительно, мы видели, что если $f_n(x) = x^n$, то $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для $0 \leqslant x < 1$; значит, для $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ имеем всегда $f(x) = 0$. Для того чтобы добиться выполнения неравенства

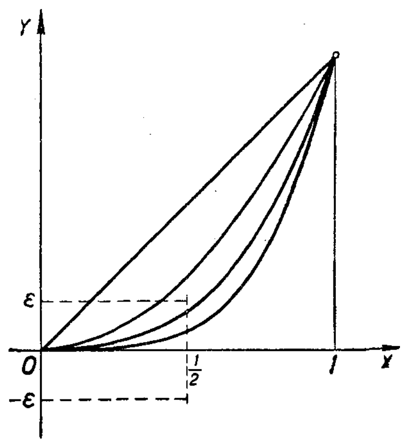
$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

для всех x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, и для всех $n > N$, достаточно выбрать N так, чтобы $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$; тогда

$$|0 - x^n| = x^n \leqslant \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

для любого $n > N$ и для всякого x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Кривые $y = x^n$, как только n станет достаточно большим, лежат целиком внутри полосы ширины 2ε около отрезка $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (черт. 15). Однако мы не можем сказать это про весь отрезок $(0,1)$, как это было разобрано в предыдущем параграфе.



Черт. 15.

Если последовательность функций сходится в каждой точке некоторого отрезка, но не является равномерно сходящейся на нем, то говорят, что она *сходится неравномерно* на этом отрезке. Таким образом про последовательность x, $x^2, \dots$, $x^n, \dots$ мы можем сказать, что она сходится равномерно на отрезке $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, но сходится неравномерно на $(0,1)$.

Постараемся всмотреться ближе в явление неравномерной сходимости. Понятие неравномерной сходимости введено чисто отрицательным способом: если *нет* равномерной сходимости на (a, b), а сходимость в каждой точке (a, b) *есть*, то мы говорим, что эта сходимость неравномерная. Из самого определения равномерной сходимости вытекает, что если ее нет на (a, b), то, коль скоро ε задано, *нельзя* найти такое N, чтобы неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

было справедливо для всех $n > N$ и для всех x на (a, b). Между тем, для всякого x на (a, b) последовательность сходится; значит, для всякого

x существует такое свое собственное целое N (обозначим его для ясности через N_x, чтобы указать, что оно определено для данного x), для которого, лишь только $n > N_x$, мы имеем:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Если бы существовало такое N, что все найденные таким образом числа N_x ($a \leqslant x \leqslant b$) меньше, чем N, $N_x < N$, то из неравенства $n > N$ следовало бы для всякого x на (a, b) неравенство $n > N_x$ и, значит, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ для $n > N$ и $a \leqslant x \leqslant b$. Но тогда сходимость была бы равномерной. Раз мы предположили, что этого нет, то нельзя найти такое N, которое превосходит все N_x, каково бы ни было x на (a, b); или иначе, каково бы ни было число N, всегда найдутся на (a, b) такие точки, для которых $N_x > N$, т. е. для которых неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ хотя и начнет обязательно выполняться, начиная с некоторого индекса, но этот индекс больше, чем N.

В частности, изучая последовательность

$$x, \ x^2, \dots, \ x^n, \dots,$$

мы видели (§ 20), что для выполнения условия $x^n < \varepsilon$ при заданном ε и x надо, чтобы $|n| > \frac{|\lg \varepsilon|}{|\lg x|}$. Иначе говоря, мы можем, обозначая через N_x ближайшее к $\frac{|\lg \varepsilon|}{|\lg x|}$ целое число, сказать, что как только $n > N_x$, так мы будем иметь $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Но величины N_x растут неограниченно, когда $x \to 1$, а потому нет такого числа N, что $N_x < N$ для всех x на $(0,1)$.

Напротив, такое N есть, если x изменяется не от 0 до 1, а только от 0 до $\frac{1}{2}$. Действительно, так как $|\lg x|$ для $x < 1$ убывает вместе с ростом x, то наименьшая величина $|\lg x|$ на $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ будет при $x = \frac{1}{2}$, а потому

$$\frac{|\lg \varepsilon|}{|\lg x|} \leqslant \frac{|\lg \varepsilon|}{\left|\lg \frac{1}{2}\right|} = \frac{|\lg \varepsilon|}{\lg 2}, \qquad 0 < x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Поэтому, если $n > \frac{|\lg \varepsilon|}{\lg 2}$, то мы уже имеем $x^n < \varepsilon$ для всех x на $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, и, значит, последовательность сходится равномерно на этом отрезке.

Все сказанное выше можно формулировать еще иначе. Если

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

то $f_n(x)$ дает приближенное значение для $f(x)$ с точностью до ε. Сказать, что последовательность функций $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ *равномерно* на (a, b), это значит сказать, что при достаточно большом N функция $f_n(x)$ для $n > N$ дает приближение к $f(x)$ с точностью до ε для всех x на (a, b). Тогда как если последовательность сходится *неравномерно*, то для того чтобы получить приближенную с точностью до ε величину для $f(x)$, надо для некоторых точек x брать величину функции $f_n(x)$, для других $f_m(x)$, для третьих $f_p(x)$,... и т. д.; вообще, какой бы большой индекс мы ни взяли, мы никогда не добьемся того, чтобы функция с этим индексом и все следующие за ней давали приближение к $f(x)$ с точностью до ε.

§ 22. Равномерная сходимость ряда.

Функциональный ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

называется равномерно сходящимся на отрезке (a, b), *если последовательность его частных сумм* $S_n(x)$,

$$S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x),$$

сходится равномерно на (a, b).

В § 19 мы условились называть суммой ряда и обозначать через $S(x)$ предел последовательности частных сумм ряда, т. е.

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

Поэтому определение равномерной сходимости ряда на (a, b) следует понимать так: каково бы ни было ε, можно найти такое целое N, что

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

для $n>N$ и для всех x, $a\leqslant x\leqslant b$. Если сходящийся на (a, b) ряд не является равномерно сходящимся, мы будем говорить, что он сходится неравномерно.

В § 5, рассматривая числовой ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

мы условились, в случае его сходимости, называть n-м остатком этого ряда и обозначать через R_n сумму ряда

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots.$$

Мы видели, что тогда между суммой S данного ряда, его n-й частной суммой S_n и n-м остатком R_n имеет место соотношение $S-S_n=R_n$ и что поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$.

Если для функционального ряда, сходящегося в каждой точке x некоторого отрезка (a, b), мы определим величину остатка в каждой такой точке, то ее естественно обозначить через $R_n(x)$, и мы можем написать:

$$S(x)-S_n(x)=R_n(x),$$

а также

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots.$$

Из условия

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0,$$

т. е. остаток ряда стремится к нулю для всякого x на (a, b). Но если ряд сходится равномерно, то к этому можно добавить следующее: остаток ряда не только для всякого x может быть сделан как угодно малым с ростом n, но можно *сразу для всех* x на (a, b) сделать его меньше наперед заданного ε, взяв n достаточно большим. Иначе говоря, чтобы найти приближенную величину суммы равномерно сходящегося ряда с точностью до ε, надо, взяв достаточно большое число n первых его членов, вычислить их сумму, и мы получим нужный результат сразу для всех x на нашем отрезке.

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots$$

и докажем, что он сходится равномерно на отрезке $(-1, +1)$. Действительно, ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

есть убывающая геометрическая прогрессия, а потому он сходится. На основании первой теоремы § 15, из того, что $|x|\leqslant 1$, а значит

$$\left|\frac{x^n}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n},$$

следует, что для $|x|\leqslant 1$, т. е. на отрезке $(-1, +1)$, исследуемый ряд сходится в каждой точке (и притом абсолютно). Пусть ε задано. Выберем N столь большим, чтобы $\frac{1}{2^N}<\varepsilon$; тогда для всякого $n>N$ будем иметь:

$$\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

Пусть r_n есть n-й остаток нашей геометрической прогрессии, т. е.

$$r_n=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots;$$

значит,

$$r_n=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n},$$

откуда следует, что если только $\frac{1}{2^N}<\varepsilon$, то $r_n<\varepsilon$ для всякого $n>N$.

Обозначая через $R_n(x)$ n-й остаток исследуемого нами ряда, мы заключаем (§ 15), что

$$|R_n(x)|\leqslant r_n=\frac{1}{2^n}, \qquad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Поэтому, если только N выбрано так, что $\frac{1}{2^N}<\varepsilon$, то $|R_n(x)|<\varepsilon$ для всех x на $(-1, +1)$, а это и доказывает, что наш ряд сходится равномерно на (a, b).

В качестве примера ряда, сходящегося неравномерно, рассмотрим ряд

$$1+(x-1)+x(x-1)+\ldots+x^{n-1}(x-1)+\ldots.$$

Так как

$$S_n(x) = 1 + (x-1) + (x-1)x + \ldots + (x-1)x^{n-1} =$$
$$= 1 + x - 1 + x^2 - x + \ldots + x^n - x^{n-1} = x^n,$$

то последовательность его частных сумм есть последовательность

$$x, x^2, \ldots, x^n, \ldots,$$

уже ранее нами изученная. Мы видели (§ 20), что на (0,1) она сходится неравномерно. Значит, наш ряд сходится неравномерно на (0,1).

§ 23. Критерий Вейерштрасса.

Вейерштрасс указал один очень простой и вместе с тем часто встречающийся случай, когда можно сразу установить равномерную сходимость ряда. Прежде чем формулировать теорему Вейерштрасса, введем понятие о *мажорируемом ряде.*

Функциональный ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

мы назовем мажорируемым на отрезке (a, b), если существует такой числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

с положительными членами и сходящийся, что для всех значений x на (a, b)

$$|f_n(x)| \leqslant a_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Другими словами, *мы назовем функциональный ряд мажорируемым, если каждый член его по абсолютной величине не больше соответствующего члена сходящегося ряда с положительными членами.*

Например, ряд

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

есть мажорируемый на всей оси абсцисс, так как при всяком x

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

а ряд

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

есть, как мы знаем, сходящийся (§ 11).

Ясно, что **ряд, мажорируемый на отрезке (a, b), сходится абсолютно в каждой точке этого отрезка,** так как для любого x_0 на этом отрезке числовой ряд

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots$$

имеет члены, по абсолютной величине не превосходящие членов ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, а тогда этот ряд сходится абсолютно (§ 15).

Но теорема Вейерштрасса показывает, что можно высказать и нечто большее о сходимости мажорируемого ряда, а именно:

Если ряд мажорируем на отрезке (a, b), то он сходится абсолютно и равномерно на этом отрезке.

В самом деле, пусть ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \qquad (f)$$

мажорируем на отрезке $(a; b)$; следовательно, существует такой сходящийся ряд с положительными членами

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ldots, \qquad (\alpha)$$

что

$$|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$$

для $n=1, 2, 3, \ldots$ и $a \leqslant x \leqslant b$.

Мы уже видели, что ряд (f) должен сходиться, и притом абсолютно в каждой точке отрезка (a, b). Обозначим n-й остаток этого ряда через $R_n(x)$, т. е.

$$R_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots,$$

и сравним его с n-м остатком r_n ряда (α),

$$r_n=\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots.$$

Так как из мажорируемости ряда (f) следует

$$|f_{n+p}(x)| \leqslant \alpha_{n+p},$$

для $p=1, 2, 3, \ldots$ и $a \leqslant x \leqslant b$, то из теоремы § 15 заключаем, что

$$|R_n(x)| \leqslant r_n, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Но ряд α сходится по условию; поэтому, как только ε задано, можно найти такое N, что для $n > N$

$$|r_n| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для заданного ε можно найти N так, что для $n > N_n$ и $a \leqslant x \leqslant b$

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

а это и показывает, что ряд (f) сходится равномерно, и, следовательно, теорема Вейерштрасса доказана.

Эту теорему можно назвать критерием (признаком) Вейерштрасса, так как она позволяет указать условие, при котором ряд равномерно сходится.

Следует, однако, отметить, что это условие является лишь достаточным, но не необходимым, т. е. *ряд может сходиться равномерно без того, чтобы быть мажорируемым.* Действительно, мы видели, что ряд, мажорируемый на отрезке (a, b), должен абсолютно сходиться в каждой его точке, а между тем можно построить *ряд, который сходится равномерно на некотором отрезке, но в некоторых точках этого отрезка сходится лишь условно.*

Например, ряд

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

сходится равномерно для $0 \leqslant x \leqslant 1$, так как для положительных x этот ряд есть знакочередующийся, и если $0 < x \leqslant 1$, то члены его убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю; поэтому, на основании теоремы § 14, он сходится для $0 \leqslant x \leqslant 1$. Кроме того, полагая

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{n+2} + \ldots,$$

мы, на основании той же теоремы § 14, заключаем, что

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

а потому для $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1},$$

т. е. ряд сходится равномерно на (0, 1). Но для $x = 1$ этот ряд принимает вид:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

т. е. сходится условно, а не абсолютно.

Мы убедились, что из равномерной сходимости ряда на некотором отрезке не вытекает его абсолютная сходимость. Нетрудно убедиться, что и обратно: *ряд может сходиться абсолютно в каждой точке отрезка без того, чтобы быть равномерно сходящимся на нем.*

Например, ряд

$$(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \ldots + x^n(1-x) + \ldots$$

для $0 \leqslant x \leqslant 1$ сходится абсолютно, так как, если $x = 0$, то все его члены равны нулю, кроме первого; если $x = 1$, то все члены равны нулю, и, наконец, для $0 < x < 1$ все члены положительны и ряд представляет собой убывающую геометрическую прогрессию. Однако он сходится неравномерно на (0,1), в чем нетрудно убедиться, непосредственно вычислив $S_n(x)$; но можно заметить, что он отличается от ряда

$$1 + (x-1) + x(x-1) + \ldots + x^{n-1}(x-1) + \ldots,$$

неравномерная сходимость которого была доказана в конце § 22, лишь тем, что в этом последнем ряде отброшена 1 и знаки у всех членов изменены на обратные, а от этих операций он, разумеется, не перестанет быть неравномерно сходящимся. Итак, ряд может сходиться абсолютно без того, чтобы сходиться равномерно.

Наконец, можно также показать на примере, что *ряд может сходиться и абсолютно, и равномерно на некотором отрезке, но все-таки не быть мажорируемым на нем.*

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим ряд:

$$\left(\frac{1}{\lg 2} x - \frac{1}{\lg 3} x^2\right) + \left(\frac{1}{\lg 3} x^2 - \frac{1}{\lg 4} x^3\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{\lg(n+1)} x^n - \frac{1}{\lg(n+2)} x^{n+1}\right) + \ldots.$$

Ясно, что этот ряд сходится абсолютно на $0 \leqslant x \leqslant 1$, так как все его члены положительны при $0 < x \leqslant 1$ (и равны нулю при $x = 0$), и притом, так как для суммы его n первых членов находим

$$S_n(x) = \frac{1}{\lg 2} x - \frac{1}{\lg(n+2)} x^{n+1},$$

то он сходится для всех указанных значений x. Ясно также, что сходимость его будет равномерной на том же отрезке, так как при $0 < x \leqslant 1$, мы имеем:

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \frac{x}{\lg 2},$$

а потому для $R_n(x)$,

$$R_n(x)=S(x)-S_n(x)=\frac{x^{n+1}}{\lg(n+2)},$$

мы находим:

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{\lg(n+2)}.$$

Тем не менее этот ряд не будет мажорируемым на отрезке (0,1). Чтобы убедиться в этом, найдем сначала максимум его n-го члена,

$$u_n(x)=\frac{1}{\lg(n+1)}x^n-\frac{1}{\lg(n+2)}x^{n+1}.$$

Имеем:

$$u_n'(x)=\frac{n}{\lg(n+1)}x^{n-1}-\frac{n+1}{\lg(n+2)}x^n;$$

значит, $u_n'(x)=0$, если

$$x^{n-1}\left(\frac{n}{\lg(n+1)}-\frac{n+1}{\lg(n+2)}x\right)=0,$$

откуда если $x\neq 0$, то

$$x=\frac{n}{n+1}\frac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)}.$$

Вычислив вторую производную

$$u_n''(x)=\frac{n(n-1)}{\lg(n+1)}x^{n-2}-\frac{(n+1)n}{\lg(n+2)}x^{n-1}=nx^{n-2}\left[\frac{n-1}{\lg(n+1)}\quad\frac{n+1}{\lg(n+2)}x\right],$$

мы убеждаемся, что она отрицательна при

$$x=\frac{n}{n+1}\frac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)},$$

ибо множитель перед скобкой положителен, а множитель в скобке равен

$$\frac{n-1}{\lg(n+1)}-\frac{n+1}{\lg(n+2)}\frac{n}{n+1}\frac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)}=-\frac{1}{\lg(n+1)}<0.$$

Поэтому $u_n(x)$ имеет максимум в точке

$$x_n=\frac{n}{n+1}\frac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)}.$$

В этой точке

$$u_n(x_n)=(x_n)^n\left[\frac{1}{\lg(n+1)}-\frac{1}{\lg(n+2)}x_n\right]=$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{\lg^n(n+2)}{\lg^n(n+1)}\left[\frac{1}{(n+1)\lg(n+1)}\right].$$

Обозначим правую часть этого равенства через α_n т. е. положим

$$\alpha_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{\lg^n(n+2)}{\lg^n(n+1)}\frac{1}{(n+1)\lg(n+1)};$$

тогда $u_n(x_n)=\alpha_n$. Докажем, что ряд

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ldots$$

расходится. С этой целью заметим, что

$$\alpha_n>\frac{1}{e}\frac{1}{(n+1)\lg(n+1)}.$$

В самом деле, как известно, выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает вместе с n и имеет своим пределом число e при $n \to \infty$. Поэтому $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ убывает при $n \to \infty$ и имеет пределом $\frac{1}{e}$; значит, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{1}{e}$. Кроме того, $\lg(n+2) > \lg(n+1)$, а потому второй сомножитель в выражении для α_n будет > 1. Раз так, то нужное неравенство для α_n доказано.

Но в § 11 было доказано, что ряд

$$\frac{1}{2\lg 2} + \frac{1}{3\lg 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\lg(n+1)} + \ldots$$

расходится; отсюда следует, что и ряд

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

расходится.

Допустим, теперь, что ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

мажорируем на (0,1); значит, существует такой сходящийся ряд с положительными членами

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + \ldots,$$

что для $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$|u_n(x)| \leqslant \beta_n;$$

тогда

$$\begin{array}{l} |u_1(x_1)| \leqslant \beta_1, \\ |u_2(x_2)| \leqslant \beta_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ |u_n(x_n)| \leqslant \beta_n, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

так как все точки x_n заключены между 0 и 1; а так как $u_n(x_n) = \alpha_n$, то отсюда вытекало бы

$$\alpha_n \leqslant \beta_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

а это невозможно, так как ряд из β_n сходится, а ряд из α_n расходится. Значит, мы пришли к противоречию.

Отсюда вытекает, что нам удалось построить ряд, сходящийся абсолютно и равномерно на некоторсм отрезке, но не можорируемый на нем.

§ 24. Непрерывность суммы ряда.

Мы знаем, что сумма *конечного* числа непрерывных функций есть всегда непрерывная функция. Если мы имеем ряд, все члены которого являются непрерывными функциями на некотором отрезке (a, b), и он сходится в каждой точке этого отрезка, то естественно спросить себя, будет ли его сумма тоже непрерывной функцией на этом отрезке. Совершенно ясно, что теорему о сумме непрерывных функций нельзя автоматически переносить на ряды. Уже при изучении числовых рядов мы видели, что с рядом нельзя обращаться, как с конечной суммой. Это и понятно: слово „сумма" в применении к ряду употребляется чисто условно: мы называем суммой не *результат сложения* конечного числа слагаемых, а *предел* суммы n первых членов ряда при n неограниченно возрастающем.

Нетрудно и на примерах убедиться, что *сумма ряда, членами которого являются непрерывные функции, может оказаться разрывной.*

В самом деле, в конце § 22 мы рассмотрели ряд:

$$1+(x-1)+x(x-1)+\ldots+x^{n-1}(x-1)+\ldots,$$

члены которого непрерывны на (0,1), однако его сумма $S(x)$ (как мы видели в § 18) равна 0 на $0\leqslant x<1$ и равна 1 в точке $x=1$, т. е. она разрывна в точке $x=1$ (черт. 6).

Однако мы можем доказать непрерывность суммы ряда в одном важном частном случае, а именно, когда ряд равномерно сходится.

Если члены ряда

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \qquad (f)$$

непрерывны на отрезке (a, b) и ряд равномерно сходится на этом отрезке, то его сумма есть непрерывная функция на (a, b).

Обозначим через $F(x)$ сумму нашего ряда; чтобы убедиться в ее непрерывности в точке x_0 на отрезке (a, b), надо доказать, что, каково бы ни было число ε, можно найти такое δ, что

$$|F(x_0+h)-F(x_0)|<\varepsilon,$$

если только $|h|<\delta$ и, разумеется, если x_0+h так же, как и x_0, принадлежит к (a, b).

Обозначим через $s_n(x)$ сумму n первых членов ряда (f) и через $R_n(x)$ остаток этого ряда, т. е. сумму ряда

$$f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots,$$

который, как мы знаем, сходится, когда x принадлежит отрезку (a, b). Мы имеем для всякого x на отрезке (a, b) и для всякого n:

$$F(x)=s_n(x)+R_n(x).$$

Так как ряд, по условию, сходится равномерно на (a, b), то для заданного ε мы можем найти такое N, что для любого $n>N$ и для всякого x на (a, b)

$$|R_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Мы можем поэтому, взяв некоторое фиксированное n, лишь бы оно было $>N$, уже не менять его в дальнейшем и утверждать, что для этого n

$$|R_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |R_n(x_0+h)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

при всяком h, если только x_0+h находится на отрезке (a, b). Поэтому, предполагая только, что x_0 и x_0+h принадлежат к (a, b), имеем:

$$\begin{aligned}&|F(x_0+h)-F(x_0)|=|[s_n(x_0+h)+R_n(x_0+h)]-\\&-[s_n(x_0)+R_n(x_0)]|=|s_n(x_0+h)-s_n(x_0)+R_n(x_0+h)-\\&-R_n(x_0)|\leqslant|s_n(x_0+h)-s_n(x_0)|+|R_n(x_0+h)-R_n(x_0)|\leqslant\\&\leqslant|s_n(x_0+h)-s_n(x_0)|+|R_n(x_0+h)|+|R_n(x_0)|\leqslant\\&\leqslant|s_n(x_0+h)-s_n(x_0)|+2\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Но так как n было фиксировано, т. е. оно не будет больше меняться в процессе нашего рассуждения, то $s_n(x)$, будучи суммой n непрерывных функций (n — постоянно), сама будет непрерывной функцией. Значит, можно найти такое δ, что как только h станет по абсолютной величине меньше δ, $|h| < \delta$, и если при этом $x_0 + h$ принадлежит к (a, b), то

$$|s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но так как

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| \leqslant |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| + 2\frac{\varepsilon}{3},$$

то

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Значит, каждый раз как $|h| < \delta$ и $x_0 + h$, как и x_0, принадлежат к (a, b),

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| \leqslant \varepsilon,$$

а это и доказывает непрерывность $F(x)$ в точке x_0.

Как следствие из этой теоремы мы получаем: *если ряд из непрерывных функций мажорируем на отрезке (a, b), то его сумма есть непрерывная функция на том же отрезке.* Действительно, по теореме Вейерштрасса, если ряд мажорируем на некотором отрезке, то он сходится равномерно на этом отрезке. А тогда, на основании только что доказанной теоремы, из непрерывности его членов следует непрерывность суммы ряда.

В качестве примера рассмотрим геометрическую прогрессию

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots .$$

Пусть q любое положительное число < 1, т. е. $0 < q < 1$; тогда из условия $|x| \leqslant q$ и из сходимости ряда

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$

при $0 < q < 1$ следует, что прогрессия мажорируема на отрезке $(-q, +q)$, а потому ее сумма непрерывна на этом отрезке. Это подтверждается и непосредственным рассмотрением формулы, так как если $S(x)$ есть сумма исследуемого ряда, то

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии): эта функция действительно непрерывна на отрезке $(-q, +q)$, когда $0 < q < 1$.

Мы видели, что ряд, составленный из непрерывных функций, может иметь суммой разрывную функцию. Мы убедились, что при равномерной сходимости непрерывность членов ряда влечет за собой непрерывность его суммы. Естественно поэтому спросить себя, всегда ли, когда сумма ряда из непрерывных функций сама непрерывна, ряд сходится равномерно. Ответ на этот вопрос, как мы сейчас докажем, является отрицательным, т. е. *ряд из непрерывных функций может сходиться неравномерно и, однако, иметь суммой непрерывную функцию.*

Чтобы построить пример такого ряда, сначала построим последовательность

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots,$$

которая будет иметь пределом непрерывную функцию и, однако, будет сходиться неравномерно.

Положим

$$f_n(x) = x^n - x^{2n}.$$

Рассмотрим отрезок (0,1). Ясно, что для всякого n

$$f_n(0) = 0 \text{ и } f_n(1) = 0.$$

Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}(x^n - x^{2n}) = 0, \qquad 0 < x < 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

и потому, полагая

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

имеем:

$$f(x) \equiv 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Итак, наша последовательность сходится к нулю, т. е. к непрерывной функции на (0,1).

Докажем, что она сходится неравномерно. Полагая

$$R_n(x) = f(x) - f_n(x),$$

имеем:

$$R_n(x) = -f_n(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

значит,

$$|R_n(x)| = |f_n(x)| = x^n - x^{2n}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Если бы последовательность сходилась равномерно, мы могли бы для заданного ε найти столь большое N, что для $n > N$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$|R_n(x)| < \varepsilon.$$

Покажем, что это невозможно. Изобразим кривые $x^n - x^{2n}$. Для любого n такая кривая проходит через начало координат и пересекает ось абсцисс в точке $x = 1$; кроме того, она имеет максимум в точке $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, в чем легко убедиться, так как если

$$f_n(x) = x^n - x^{2n},$$

то

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n),$$

а потому при $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ производная становится равной нулю, тогда как вторая производная

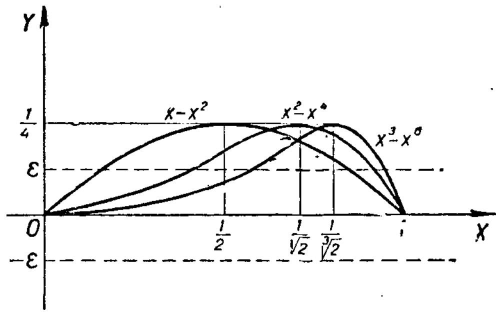
$$f''_n(x) = n(n-1)x^{n-2} - 2n(2n-1)x^{2n-2} = nx^{n-2}[(n-1) - 2(2n-1)x^n]$$

оказывается отрицательной при $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. Величина этого максимума есть

$$f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n - \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Поэтому каждая из рассматриваемых кривых имеет максимум, равный $\frac{1}{4}$ и подвигающийся все ближе и ближе к точке $x=1$ по мере того, как n растет (черт. 16).

Таким образом, ясно, что если только $\varepsilon < \frac{1}{4}$, то невозможно добиться того, чтобы $|R_n(x)| < \varepsilon$ сразу для всех x на (0,1): можно для всякого n указать такое свое x, что $|R_n(x)| > \varepsilon$, так как для этого достаточно выбрать x равным $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, и мы будем иметь $\left| R_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) \right| = \frac{1}{4}$. Наши кривые, как бы велик ни был индекс n, никогда не уложатся внутри полосы ширины 2ε, если только $\varepsilon < \frac{1}{4}$. Итак, последовательность сходится неравномерно.



Черт. 16.

Легко теперь построить ряд, у которого все члены непрерывны и сумма тоже, но сходимость его неравномерная. Для этого положим

$$u_1(x) = f_1(x)$$

и

$$u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) = (x^n - x^{2n}) - (x^{n-1} - x^{2^{n-2}}).$$

Имеем тогда для ряда

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

или

$$(x - x^2) + [(x^2 - x^4) - (x - x^2)] + [(x^3 - x^6) - (x^2 - x^4)] + \ldots$$

частную сумму

$$S_n(x) = x^n - x^{2n};$$

последовательность его частных сумм сходится неравномерно на (0,1), как мы только что доказали, а сумма

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$$

Значит, этот ряд из непрерывных функций сходится неравномерно, а сумма его есть непрерывная функция.

§ 25. Интегрирование рядов.

Мы знаем, что интеграл суммы конечного числа слагаемых равен сумме интегралов от этих слагаемых. Однако, мы не имеем никаких оснований утверждать, что это правило можно распространить на бесконечные ряды. Нетрудно убедиться на примере, что ряд может сходиться в каждой точке и иметь непрерывную сумму, однако интеграл от этой суммы не равняется сумме ряда, составленного из интегралов от членов данного ряда. Другими словами, если, как говорят, „формально" проинтегрировать почленно некоторый ряд, т. е. просто вычислить интегралы от всех его членов, то можно получить ряд, который имеет сумму, отличную от интеграла суммы первоначального ряда. Значит, формальное интегрирование вовсе не всегда является интегрированием по существу дела.

Убедимся в этом на примере. Для этого мы, прежде всего, построим последовательность непрерывных функций

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots,$$

для которой

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,dx,$$

хотя оба предела, встречающихся в этой формуле, существуют. Положим

$$f_n(x) = n^2(1-x)\,x^n = n^2 x^n - n^2 x^{n+1}.$$

Ясно, что при всяком n

$$f_n(0)=0 \quad \text{и} \quad f_n(1)=0;$$

кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \qquad 0<x<1,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty} n^2 x^n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} n^2 x^{n+1} = 0,$$

в чем легко убедиться, хотя бы применяя правило Лопиталя. Итак, полагая

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

мы видим, что $f(x)\equiv 0$ для $0\leqslant x\leqslant 1$. Поэтому

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n^2x^n\,dx - \int_0^1 n^2x^{n+1}\,dx = n^2\frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 - n^2\frac{x^{n+2}}{n+2}\bigg|_0^1 =$$

$$= n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)},$$

а потому

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 1.$$

Таким образом, мы убедились, что

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Установив это, мы легко покажем, что почленное интегрирование ряда не всегда является законным. Действительно, пусть дан ряд

$$(1-x)x+[2^2(1-x)x^2-(1-x)x]+\ldots+[n^2(1-x)x^n-$$
$$-(n-1)^2(1-x)x^{n-1}]+\ldots.$$

Ясно, что сумма n первых членов этого ряда

$$S_n(x)=n^2(1-x)x^n;$$

из предыдущего примера видно, что ряд сходится на отрезке (0,1) и его сумма

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=0.$$

Если бы мы проинтегрировали этот ряд почленно в пределах от 0 до 1, мы получили бы ряд

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx+\int_0^1 2^2(x^2-x^3)\,dx-\int_0^1 (x-x^2)\,dx+\ldots+$$
$$+\int_0^1 n^2(x^n-x^{n+1})\,dx-\int_0^1 (n-1)^2(x^{n-1}-x^n)\,dx+\ldots,$$

сумма n первых членов которого есть

$$\int_0^1 n^2(x^n-x^{n+1})\,dx=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)},$$

как уже было подсчитано раньше. Поэтому проинтегрированный ряд сходится, и его сумма равна 1, т. е. она не равна интегралу от суммы первоначального ряда, ибо $S(x)\equiv 0$, а потому $\int_0^1 S(x)\,dx=0$.

Докажем теперь, что если ряд сходится *равномерно*, то его можно почленно интегрировать. Предварительно докажем предложение:

Если последовательность непрерывных функций

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

сходится равномерно на (a, b) и если

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

то для любого α, $a\leqslant\alpha\leqslant b$, последовательность интегралов

$$\int_\alpha^x f_1(x)\,dx, \int_\alpha^x f_2(x)\,dx, \ldots, \int_\alpha^x f_n(x)\,dx, \ldots$$

сходится равномерно относительно x на (a, b), и притом

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^x f_n(x)\,dx=\int_\alpha^x f(x)\,dx.$$

Так как $\int\limits_{\alpha}^{x} f_n(x)\,dx$ есть при постоянном α функция своего верхнего предела x, то под равномерной сходимостью последовательности интегралов мы, разумеется, понимаем равномерную сходимость последовательности тех функций от x, которые выражаются этими интегралами. Чтобы доказать, что эта последовательность сходится равномерно на (a, b) и имеет пределом

$$\int\limits_{\alpha}^{x} f(x)\,dx,$$

надо доказать, что для всякого ε найдется такое N, что для $n > N$ и $a \leqslant x \leqslant b$

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{x} f(x)\,dx - \int\limits_{\alpha}^{x} f_n(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Пусть ε задано. Так как последовательность функций $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на (a, b), то можно найти такое N, что для $n > N$ и $a \leqslant x \leqslant b$

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Но в таком случае

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{x} f(x)\,dx - \int\limits_{\alpha}^{x} f_n(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{\alpha}^{x} [f(x) - f_n(x)]\,dx\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a}\left|\int\limits_{\alpha}^{x} dx\right| = \varepsilon\,\frac{|x-\alpha|}{b-a} \leqslant \varepsilon,$$

ибо $a \leqslant x \leqslant b$ и $a \leqslant \alpha \leqslant b$, и нужное неравенство получено, а следовательно теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает:

Если ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum \qquad (1)$$

сходится равномерно на (a, b) и $S(x)$ есть его сумма, то для любого α на (a, b) ряд, составленный из интегралов от его членов в пределах от α до x, т. е. ряд

$$\int\limits_{\alpha}^{x} f_1(x)\,dx + \int\limits_{\alpha}^{x} f_2(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{\alpha}^{x} f_n(x)\,dx + \ldots, \qquad (2)$$

сходится равномерно (относительно x) на (a, b) и имеет суммой интеграл от $S(x)$ в тех же пределах, т. е.

$$\int\limits_{\alpha}^{x} S(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{x} f_1(x)\,dx + \int\limits_{\alpha}^{x} f_2(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{\alpha}^{x} f_n(x)\,dx + \ldots. \qquad (3)$$

Действительно, пусть x любое число на (a, b). Рассмотрим сумму n первых членов ряда (1)

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x).$$

Если $\sigma_n(x)$ есть сумма n первых членов ряда (2), то

$$\sigma_n(x)=\int_a^x f_1(x)\,dx+\int_a^x f_2(x)\,dx+\ldots+\int_a^x f_n(x)\,dx=$$

$$=\int_a^x [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]\,dx=\int_a^x S_n(x)\,dx,$$

так как интеграл суммы равен сумме интегралов от слагаемых (если их конечное число).

Так как ряд (1) сходится равномерно на (a, b), то его сумма $S(x)$ есть непрерывная функция, и, следовательно, интегрируема. Положим

$$\sigma(x)=\int_a^x S(x)\,dx.$$

Сказать, что ряд (1) сходится равномерно на (a, b), это значит сказать, что последовательность его частных сумм сходится равномерно. Но тогда, на основании только что доказанного, мы можем утверждать, что последовательность

$$\int_a^x S_1(x)\,dx,\ \int_a^x S_2(x)\,dx,\ \ldots,\ \int_a^x S_n(x)\,dx,\ \ldots$$

сходится равномерно и

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x S_n(x)\,dx=\int_a^x S(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что последовательность

$$\sigma_1(x),\ \sigma_2(x),\ \ldots,\ \sigma_n(x),\ \ldots$$

сходится равномерно и

$$\sigma(x)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x);$$

следовательно, последовательность частных сумм ряда (2) сходится равномерно и имеет пределом

$$\sigma(x)=\int_a^x S(x)\,dx,$$

а это и показывает справедливость формулы (3).

В качестве примера рассмотрим ряд:

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots\ .$$

Пусть $0<q<1$. Если $|x|\leqslant q$, то $|x^n|\leqslant q^n$, а потому члены нашего ряда не больше членов сходящейся геометрической прогрессии

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots\ .$$

Значит, наш ряд мажорируем на $(-q, +q)$, а потому сходится равномерно на этом отрезке (§ 23). Значит, его можно почленно интегрировать на этом отрезке. Так как сумма этого ряда есть $\frac{1}{1-x}$, то мы можем написать (полагая в предыдущих формулах $a=0$):

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x} = \int_0^x 1dx + \int_0^x xdx + \int_0^x x^2dx + \ldots + \int_0^x x^n dx + \ldots,$$

и это равенство будет справедливо для любого x, лишь бы $|x| \leqslant q$. Но тогда, произведя интегрирование, мы найдем:

$$-\ln(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots.$$

Эта формула будет верна для $|x| \leqslant q$, где $0 < q < 1$; поэтому, в частности, она будет верна при $x = \frac{1}{2}$, и мы можем найти:

$$-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots.$$

Мы получили, таким образом, ряд, который позволяет вычислить величину $\ln 2$.

Возвращаясь к общей теории, мы должны осветить еще один вопрос, касающийся интегрирования. Мы видели, что ряды можно интегрировать почленно в случае их равномерной сходимости. Мы убедились на примере, что иногда ряды нельзя почленно интегрировать. Ясно теперь, что это может произойти лишь с неравномерно сходящимися рядами. Но всегда ли неравномерно сходящийся ряд не допускает почленного интегрирования? Покажем, что это не так.

В самом деле, в § 24 мы доказали, что ряд

$$(x-x^2) + [(x^2-x^4)-(x-x^2)] + \ldots + [(x^n-x^{2n}) - \\ -(x^{n-1}-x^{2n-2})] + \ldots$$

сходится неравномерно на $(0,1)$, но его сумма $S(x)=0$ на всем этом отрезке. Поэтому

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0.$$

С другой стороны, ряд, составленный из интегралов

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx + \int_0^1 [(x^2-x^4)-(x-x^2)]\,dx + \ldots + \\ + \int_0^1 [(x^n-x^{2n})-(x^{n-1}-x^{2n-2})]\,dx + \ldots,$$

также сходится к 0, в чем нетрудно убедиться, заметив, что сумма σ_n его n первых членов есть

$$\sigma_n = \int_0^1 (x^n - x^{2n})\,dx$$

(все остальные члены попарно уничтожаются), а потому

$$\sigma_n = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1},$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0.$$

Итак, ряд оказалось возможным проинтегрировать почленно, хотя он и сходился неравномерно.

Резюмируя все сказанное, мы можем притти к такому выводу:

Равномерно сходящиеся ряды всегда можно интегрировать почленно, тогда как неравномерно сходящиеся ряды в некоторых случаях допускают, а в других не допускают почленное интегрирование.

§ 26. Диференцирование рядов.

Мы видели в предыдущем параграфе, что почленное интегрирование рядов не всегда является законным. Однако оно законно, когда ряд сходится равномерно. Можно было бы ожидать, что и диференцирование ряда является законным, если он равномерно сходится. Но это ожидание не оправдывается. В самом деле, рассмотрим ряд

$$\frac{\sin 1^3 x}{1^2} + \left(\frac{\sin 2^3 x}{2^2} - \frac{\sin 1^3 x}{1^2}\right) + \ldots + \left(\frac{\sin n^3 x}{n^2} - \frac{\sin (n-1)^3 x}{(n-1)^2}\right) + \ldots.$$

Так как для любого x и для $n > 1$

$$\left|\frac{\sin n^3 x}{n^2} - \frac{\sin (n-1)^3 x}{(n-1)^2}\right| < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} < \frac{2}{(n-1)^2},$$

а ряд $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ сходится (§ 10), то рассматриваемый ряд мажорируем на всей оси абсцисс и, значит, сходится равномерно на всей этой оси. Ясно, что сумма его n первых членов

$$S_n(x) = \frac{\sin n^3 x}{n^2};$$

поэтому

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$$

для всех значений x. Значит, $S'(x) = 0$ для всех значений x. А между тем ряд, полученный почленным диференцированием данного, т. е. ряд

$$\cos 1^3 x + [2\cos 2^3 x - \cos 1^3 x] + \ldots +$$
$$+ [n\cos n^3 x - (n-1)\cos (n-1)^3 x] + \ldots$$

имеет сумму $\sigma_n(x)$ первых n членов равной $n\cos n^3 x$, а потому он расходится, например, при $x = 0$, так как $\sigma_n(0) = n$ (можно было бы доказать его расходимость не только для $x = 0$, но нет необходимости рассматривать подробно вопрос, для каких x он сходится и для каких расходится).

Мы убедились, что ряд может сходиться (и даже равномерно) к функции, имеющей производную, тогда как продиференцированный ряд расходится в некоторых точках. Мы увидим в § 27, что, и обратно, продиференцированный ряд может сходиться в некоторых точках, без того, чтобы сумма данного, притом мажорируемого, ряда имела в этих точках производную [в примере § 27 функция $F(x)$ не имеет производной ни в какой точке, но представляется в виде суммы мажорируемого ряда, который будучи продиференцирован, сходится к 0 при $x=0$].

В некоторых практически важных случаях ряд все же допускает почленное диференцирование. Именно это имеет место в следующем случае:

Если ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \tag{A}$$

сходится на отрезке $(a,\ b)$ и ряд, составленный из производных от его членов

$$f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_n'(x)+\ldots, \tag{B}$$

сходится равномерно на $(a,\ b)$, то сумма продиференцированного ряда равна производной от суммы первоначального ряда.

В самом деле, ряд (B), по условию, сходится равномерно на $(a,\ b)$. Пусть $S(x)$ есть его сумма. Каково бы ни было x, $a \leqslant x \leqslant b$, на основании теоремы предыдущего параграфа мы имеем право написать:

$$\int_a^x S(x)\,dx=\int_a^x f_1'(x)\,dx+\int_a^x f_2'(x)\,dx+\ldots+\int_a^x f_n'(x)\,dx+\ldots.$$

Но, производя фактически интегрирование, мы найдем:

$$\int_a^x S(x)\,dx=[f_1(x)-f_1(a)]+[f_2(x)-f_2(a)]+\ldots+[f_n(x)-f_n(a)]+\ldots.$$

Если $\sigma(x)$ есть сумма ряда (A), который, по условию, сходится на $(a,\ b)$, то

$$\sigma(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots,$$
$$\sigma(a)=f_1(a)+f_2(a)+\ldots+f_n(a)+\ldots;$$

поэтому

$$\int_a^x S(x)\,dx=\sigma(x)-\sigma(a).$$

Диференцируя обе части этого равенства, мы найдем:

$$\sigma'(x)=S(x),$$

а так как $S(x)$ есть сумма ряда (B), то мы убедились, что сумма продиференцированного ряда равна производной от суммы первоначального ряда.

Пример. Дана геометрическая прогрессия

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots.$$

Если $0<q<1$, то прогрессия сходится для $|x|\leqslant q$ и ее сумма есть $\frac{1}{1-x}$. Продиференцировав почленно наш ряд, получим:

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots.$$

Нетрудно видеть, что полученный ряд мажорируем на том же отрезке. Действительно,

$$|nx^{n-1}| \leqslant nq^{n-1},$$

а ряд

$$1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}+\ldots$$

сходится, в чем можно убедиться хотя бы при помощи признака Даламбера.

Итак, ряд, полученный диференцированием нашей прогрессии почленно, мажорируем на $(-q, +q)$, а следовательно, сходится равномерно на этом отрезке. Поэтому, на основании только что доказанной теоремы, мы можем утверждать, что его суммой на том же отрезке будет производная от $\frac{1}{1-x}$, а это дает:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots,$$

каково бы ни было q, $0<q<1$.

Мы видели, что если ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{1}$$

сходится к $F(x)$, то возможно, что $F'(x)$ существует для некоторого x, а ряд

$$u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots \tag{2}$$

расходится для этого x. Мы видели, что, и обратно, ряд (2) может сходиться без того, чтобы $F'(x)$ существовала. Естественно спросить себя теперь: если $F'(x)$ существует для $x=x_0$ и ряд (2) сходится для $x=x_0$, то будем ли мы непременно иметь

$$F'(x_0)=u_1'(x_0)+u_2'(x_0)+\ldots+u_n'(x_0)+\ldots. \tag{3}$$

Мы видели, что если ряд (2) сходится равномерно на некотором отрезке, то равенство (3) имеет место для всех точек этого отрезка. Покажем, что без дополнительных требований равенство (3) может и не иметь места. В самом деле, пусть дан ряд

$$\frac{\sin x}{1}+\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin x}{1}\right)+\ldots+\left(\frac{\sin nx}{n}-\frac{\sin (n-1)x}{n-1}\right)+\ldots.$$

Ясно, что $S_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$, а потому $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=0$ для всех x. Поэтому $S'(x)=0$ для всех x. С другой стороны, для продиференцированного ряда

$$\cos x+(\cos 2x-\cos x)+\ldots+(\cos nx-\cos (n-1)x)+\ldots$$

имеем, обозначая через $\sigma_n(x)$ сумму его n первых членов, $\sigma_n(x)=\cos nx$; поэтому при $x=0$ этот ряд сходится и его сумма $\sigma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x)=1$; значит, равенство (3) нарушается при $x=0$.

§ 27. Непрерывная функция без производной.

В этом параграфе мы хотим при помощи теории рядов построить пример непрерывной функции, у которой нет ни в одной точке конечной производной. Открытие таких функций принадлежит Вейерштрассу. Ему принадлежит и рассматриваемый ниже простой пример функции, обладающей этим свойством. Пусть дан ряд:

$$1+b\cos(a\pi x)+b^2\cos(a^2\pi x)+\ldots+b^n\cos(a^n\pi x)+\ldots, \tag{1}$$

где $0<b<1$ и a — некоторое нечетное целое число. Этот ряд мажорируем для всех значений x, потому что

$$|b^n\cos(a^n\pi x)|\leqslant b^n,$$

причем ряд

$$1+b+b^2+\ldots+b^n+\ldots$$

сходится, так как $0<b<1$. Отсюда следует, что ряд (1) сходится для всех значений x и его сумма $F(x)$ есть непрерывная функция. Имеем:

$$F(x)=1+b\cos(a\pi x)+b^2\cos(a^2\pi x)+\ldots+b^n\cos(a^n\pi x)+\ldots. \tag{2}$$

Ряд, полученный почленным диференцированием данного, имеет вид:

$$-\pi ab\sin(a\pi x)-\pi a^2b^2\sin(a^2\pi x)-\ldots-\pi a^nb^n\sin(a^n\pi x)-\ldots. \tag{3}$$

Если бы мы предположили, что $ab<1$, то этот ряд оказался бы мажорируемым, ибо

$$|-\pi a^nb^n\sin(a^n\pi x)|\leqslant \pi a^nb^n,$$

а ряд

$$\pi ab+\pi a^2b^2+\ldots+\pi a^nb^n+\ldots$$

при $ab<1$ есть сходящийся. В этом случае, по теореме предыдущего параграфа, ряд (3) сходился бы и имел бы суммой $F'(x)$, откуда следовало бы, что $F(x)$ не только имеет в каждой точке производную, но что эта производная непрерывна (как сумма мажорируемого ряда).

Все это получилось бы, если бы мы предполагали $ab<1$. Вейерштрасс, напротив, выбрал a и b так, чтобы

$$ab>1+\frac{3\pi}{2}. \tag{4}$$

Покажем, что при этом условии функция $F(x)$ уже не может иметь конечной производной ни в какой точке[1]).

С этой целью рассмотрим отношение:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Если мы убедимся, что оно при всяком x и при h, стремящемся к нулю, не может стремиться к конечному пределу, это и будет доказывать, что $F(x)$ нигде не имеет конечной производной. Но из формулы (2) следует:

$$F(x+h)=1+b\cos[a\pi(x+h)]+b^2\cos[a^2\pi(x+h)]+\ldots+$$
$$+b^n\cos[a^n\pi(x+h)]+\ldots;$$

поэтому

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=b\frac{\cos[a\pi(x+h)]-\cos(a\pi x)}{h}+\ldots+$$
$$+b^n\frac{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos(a^n\pi x)}{h}+\ldots.$$

---

[1]) Однако ряд (3) сходится к 0 при $x=0$. Следовательно, как мы указывали в § 26, ряд может сходиться к функции, лишенной производной, в то время как продиференцированный ряд сходится.

Если мы обозначим через $s_m(x, h)$ сумму $m-1$ первых членов этого ряда и через $R_m(x, h)$ его остаток, т. е. если положим

$$s_m(x, h) = b\frac{\cos[a\pi(x+h)] - \cos(a\pi x)}{h} + \ldots +$$
$$+ b^{m-1}\frac{\cos[a^{m-1}\pi(x+h)] - \cos(a^{m-1}\pi x)}{h},$$
$$R_m(x, h) = b^m\frac{\cos[a^m\pi(x+h)] - \cos(a^m\pi x)}{h} +$$
$$+ b^{m+1}\frac{\cos[a^{m+1}\pi(x+h)] - \cos(a^{m+1}\pi x)}{h} + \ldots,$$

то

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = s_m(x, h) + R_m(x, h).$$

Но по теореме Лагранжа о конечном приращении имеем:

$$\cos[a^n\pi(x+h)] - \cos(a^n\pi x) = -a^n\pi h\sin[a^n\pi(x+\theta h)], \qquad 0 < \theta < 1;$$

поэтому

$$|\cos[a^n\pi(x+h)] - \cos(a^n\pi x)| \leqslant a^n\pi|h|,$$

откуда следует, что

$$|s_m(x, h)| \leqslant ba\pi + b^2a^2\pi + \ldots + b^{m-1}a^{m-1}\pi = \pi\frac{a^mb^m - ab}{ab-1},$$

а так как мы предположили $ab > 1$, то и подавно

$$|s_m(x, h)| < \pi\frac{a^mb^m}{ab-1}.$$

Перейдем теперь к оценке $R_m(x, h)$. Если x дано, то a^mx есть некоторое число, целое или дробное. Обозначим через α_m ближайшее к нему (взятое по недостатку или по избытку) целое число, тогда

$$a^mx = \alpha_m + \xi_m,$$

где ξ_m заключено между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$. Положим

$$h'_n = \frac{1-\xi_m}{a^m} \quad \text{и} \quad h''_m = \frac{-1-\xi_m}{a^m}.$$

Ясно, что $h'_m > 0$ и $h''_m < 0$, ибо $-\frac{1}{2} \leqslant \xi_m \leqslant +\frac{1}{2}$. Кроме того, имеем:

$$|h'_m| < \frac{3}{2a^m} \quad \text{и} \quad |h''_m| < \frac{3}{2a^m}$$

опять потому, что ξ_m заключено между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$.

Так как a — некоторое нечетное целое число, не равное единице (потому что $ab > 1$, но $b < 1$), то a^m неограниченно возрастает при неограниченном возрастании m. Поэтому числа h'_m, оставаясь положительными, стремятся к нулю, а числа h''_m, оставаясь отрицательными, также стремятся к нулю при неограниченном возрастании m.

Далее, мы имеем:

$$a^n\pi(x+h'_m) = a^{n-m}a^m\pi(x+h'_m) = a^{n-m}\pi(a^mx + a^mh'_m) =$$
$$= a^{n-m}\pi[(\alpha_m+\xi_m) + (1-\xi_m)] = a^{n-m}\pi(\alpha_m+1)$$

и аналогично

$$a^n\pi(x+h''_m) = a^{n-m}\pi(\alpha_m-1).$$

Так как α_m — целое, то α_m+1 и α_m-1 — целые числа; оба они одновременно четные или нечетные. Если $n \geqslant m$, то a^{n-m} есть целое нечетное число, а потому произведения $a^{n-m}(\alpha_m+1)$ и $a^{n-m}(\alpha_m-1)$ будут четными, если α_m+1 и α_m-1 четны, и нечетными, если α_m+1 и α_m-1 нечетны. Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\cos a^n\pi(x+h'_m)=\cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m+1)]=(-1)^{\alpha_m+1} \\ &\text{и аналогично} \\ &\cos a^n\pi(x+h''_m)=\cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m-1)]=(-1)^{\alpha_m-1}=(-1)^{\alpha_m+1}\end{aligned}\right\} n\geqslant m,$$

так как $\cos k\pi=(-1)^k$, каково бы ни было целое число k.

Кроме того, мы имеем:

$$\cos(a^n\pi x)=\cos(a^{n-m}a^m\pi x)=\cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m+\xi_m)]=$$
$$=\cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)-\sin(a^{n-m}\pi\alpha_m)\sin(a^{n-m}\pi\xi_m)=$$
$$=\cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)\cos(a^{n-m}\pi\xi_m),$$

так как $\sin(a^{n-m}\pi\alpha_m)=0$, ибо α_m и a^{n-m} — целые при $n\geqslant m$. Но

$$\cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)=(-1)^{\alpha_m},$$

так как $a^{n-m}\alpha_m$ одновременно с α_m четно или нечетно; поэтому

$$\cos(a^n\pi x)=(-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\xi_m).$$

Отсюда при $n\geqslant m$ имеем:

$$\cos[a^n\pi(x+h'_m)]-\cos(a^n\pi x)=(-1)^{\alpha_m+1}-(-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)=$$
$$=(-1)^{\alpha_m+1}[1+\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)]$$

и аналогично

$$\cos[a^n\pi(x+h''_m)]-\cos(a^n\pi x)=(-1)^{\alpha_m+1}[1+\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)].$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{R}_m(x,h'_m)=\frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h'_m}\left\{b^m[1+\cos(\pi\xi_m)]+b^{m+1}[1+\cos(a\pi\xi_m)]+\right.$$
$$\left.+\ldots+b^{m+k}[1+\cos(a^k\pi\xi_m)]+\ldots\right\}.$$

Аналогичное равенство имеем для $\mathrm{R}_m(x,h''_m)$, заменяя только в правой части равенства h'_m через h''_m. Но у ряда, стоящего в фигурных скобках, все члены положительны или равны нулю, поэтому сумма этого ряда не меньше, чем его первый член

$$b^m[1+\cos(\pi\xi_m)],$$

а так как $-\frac{1}{2}\leqslant\xi_m\leqslant+\frac{1}{2}$, то $\cos\pi\xi_m\geqslant0$, а потому сумма ряда больше или равна b^m. Отсюда следует, что

$$|\mathrm{R}_m(x,h'_m)|\geqslant\frac{b^m}{h'_m}$$

и аналогично

$$|\mathrm{R}_m(x,h''_m)|\geqslant\frac{b^m}{|h''_m|}.$$

Но так как

$$|h'_m|<\frac{3}{2a^m}\quad\text{и}\quad|h''_m|<\frac{3}{2a^m},$$

то

$$|\mathrm{R}_m(x,h'_m)|>\frac{2}{3}(ab)^m\quad\text{и}\quad|\mathrm{R}_m(x,h''_m)|>\frac{2}{3}(ab)^m.$$

Вспомним, что мы условились выбирать a и b так, чтобы

$$ab>1+\frac{3\pi}{2};$$

поэтому

$$\frac{2}{3}>\frac{\pi}{ab-1},$$

и мы можем написать:

$$c=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}, \text{ где } c>0.$$

Мы видели выше, что при любых x и h

$$|s_m(x, h)|<\pi\frac{(ab)^m}{ab-1};$$

отсюда следует, что

$$\left|\frac{F(x+h'_m)-F(x)}{h'_m}\right|\geqslant|R_m(x, h'_m)|-|s_m(x, h'_m)|>$$

$$>\frac{2}{3}(ab)^m-\pi\frac{(ab)^m}{ab-1}=(ab)^m\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right)=c(ab)^m.$$

Подобно этому

$$\left|\frac{F(x+h''_m)-F(x)}{h''_m}\right|>c(ab)^m.$$

Но так как при неограниченном возрастании m правая часть неограниченно возрастает, то, значит, и левая часть также неограниченно возрастает. Таким образом мы видим, что выражения

$$\frac{F(x+h'_m)-F(x)}{h'_m} \quad \text{и} \quad \frac{F(x+h''_m)-F(x)}{h''_m}$$

неограниченно возрастают по абсолютной величине вместе с m. Это показывает, что $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ не может стремиться к конечному пределу при h, стремящемся к нулю, даже и тогда, когда h остается все время положительным, а также и тогда, когда h остается все время отрицательным (так как все h'_m положительны, а h''_m отрицательны, причем как те, так и другие стремятся к нулю). Значит, функция $F(x)$ не может иметь конечной производной ни при каком значении x.

Вейерштрасс полагал, что его функция вообще не имеет никакой производной для любого x. Позднейшие исследования показали, что в его примере функция $F(x)$ все же имеет производную в бесконечном множестве точек, но эта производная бесконечна. Можно, однако, построить такие непрерывные функции, которые уже не имеют ни конечной, ни бесконечной производной ни в какой точке (такой пример впервые был дан Безиковичем). Следует заметить, что примеры непрерывных функций без производной теперь строятся преимущественно геометрическим путем. Этот способ хорош тем, что дает наглядное представление, почему данная функция лишена производной или, иначе говоря, почему изображающая ее кривая лишена касательной. В примере Вейерштрасса этой наглядности нет. Если мы, тем не менее, привели здесь именно пример Вейерштрасса, то это было сделано с целью показать, к каким на первый взгляд совершенно неожиданным последствиям можно притти, пытаясь диференцировать ряд почленно.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.

§ 28. Введение.

Среди рядов, члены которых являются непрерывными функциями от x, наиболее значительную роль в Анализе играют ряды вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... — постоянные числа, называемые *коэфициентами* ряда; самый ряд носит название *степенного*; степенной ряд *задан*, если дана последовательность его коэфициентов.

Когда ряд (1) задан, то может случиться, что он расходится для всех значений x, кроме $x = 0$.

Например, ряд

$$1 + x + (2x)^2 + \ldots + (nx)^n + \ldots$$

расходится для всякого x, отличного от нуля, так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} |nx| = +\infty, \qquad x \neq 0,$$

откуда, на основании признака Коши, следует расходимость.

Так же ведет себя и ряд

$$1\cdot x + 1\cdot 2\cdot x^2 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot x^3 + \ldots + 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot x^n + \ldots;$$

это следует, на основании признака Даламбера, из того, что

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)x| = +\infty.$$

Точка $x = 0$ всегда будет точкой сходимости, так как при $x = 0$ степенной ряд имеет все члены равными нулю, кроме, быть может, члена a_0.

Далее, может случиться, что ряд сходится для всех без исключения значений x. Таков, например, будет ряд:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} + \ldots.$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0$$

для всех значений x. Значит, на основании признака Даламбера, ряд сходится, и притом абсолютно, для всех значений x.

Мы видели, что степенной ряд может расходиться для всех значений x (кроме $x = 0$) и может сходиться для всех значений x. Покажем теперь, что он может сходиться для одних и расходиться для других значений x. Таким рядом является, например, геометрическая прогрессия

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots;$$

при $|x|<1$ она является сходящимся, а при $|x|\geqslant 1$ расходящимся рядом. Мы могли бы это выразить так: для всех точек x интервала $(-1, +1)$ ряд сходится, для концов интервала и для точек, лежащих вне этого интервала, ряд расходится.

§ 29. Интервал сходимости.

Докажем следующую простую, но чрезвычайно важную теорему, принадлежащую Абелю:

Если степенной ряд сходится при некотором значении x_0, то он сходится абсолютно при всяком значении x, для которого $|x|<|x_0|$.

В самом деле, если ряд

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n+\ldots$$

сходится, то его члены с возрастанием n должны стремиться к нулю. Отсюда следует существование такого числа M, что

$$|a_nx_0^n|<M, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ldots .$$

Действительно, если бы такого числа не было, то среди членов ряда нашлись бы числа как угодно большие по абсолютной величине, а потому они не могли бы стремиться к нулю с возрастанием n.

Заметив это, возьмем ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{a}$$

и будем предполагать $|x|<|x_0|$. Для всякого n имеем:

$$|a_nx^n|=|a_n|\,|x^n|=|a_n|\,|x_0|^n\left|\frac{x}{x_0}\right|^n<M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n;$$

но так как $|x|<|x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$, а потому ряд

$$M+M\left|\frac{x}{x_0}\right|+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\ldots+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\ldots$$

есть убывающая геометрическая прогрессия и, следовательно, сходящийся ряд. Так как члены ряда (a) по абсолютной величине меньше членов этого сходящегося ряда, то ряд (a) сходится абсолютно, что и требовалось доказать.

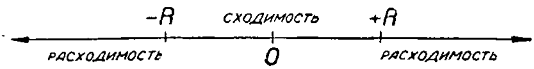
Теорема Абеля позволяет сразу составить себе представление о том, как расположены точки сходимости и точки расходимости ряда[1]). Действительно, если x_0 есть точка сходимости, то весь интервал от $-|x_0|$ до $+|x_0|$ заполнен точками сходимости, и даже абсолютной сходимости, так как для всех точек этого интервала $|x|<|x_0|$; напротив, если x_0 есть точка расходимости, то вся бесконечная полупрямая от

[1]) Вместо того чтобы говорить „точка, где ряд сходится" и „точка, где ряд расходится", мы будем говорить кратко: „точка сходимости" и „точка расходимости".

$+|x_0|$ до бесконечности вправо и вся полупрямая от $-|x_0|$ до бесконечности влево состоит из точек расходимости. В самом деле, если бы была хоть одна точка сходимости x_1, для которой $|x_1|>|x_0|$, то по теореме Абеля точка x_0 тоже была бы точкой сходимости.

Таким образом, идя от начала координат вправо, мы имеем сначала сплошь точки абсолютной сходимости, а начиная с некоторого места, сплошь точки расходимости. Обозначим через R точку, которая является границей между областью сходимости и областью расходимости, т. е. такую точку, что для всех точек с положительной абсциссой, лежащих левее R, ряд сходится абсолютно, а для точек правее R ряд расходится. Теперь мы, естественно, приходим к понятию интервала сходимости.

Интервалом сходимости степенного ряда называется такой интервал $(-R, +R)$, *что для всякой точки* x, *лежащей внутри этого интервала, ряд сходится, и притом абсолютно, а для точек* x, *лежащих вне его, ряд расходится.*



Черт. 17.

Слово „внутри“ здесь понимается в узком смысле, т. е. речь идет лишь о точках интервала, не являющихся ни его левым, ни его правым концом. В концах же интервала ряд может и расходиться, и сходиться условно, и сходиться абсолютно, — это зависит от рассматриваемого ряда.

Предыдущие рассуждения показывают, что для всякого степенного ряда может наблюдаться только один из трех случаев:

1) ряд расходится для всех значений x, кроме $x=0$;

2) ряд сходится для всех значений x;

3) ряд имеет некоторый определенный интервал сходимости $(-R, +R)$.

Действительно, мы видели, что когда не имеет места ни первый, ни второй случай, то найдется такое положительное число R, которое разделяет все точки с положительной абсциссой на два класса: лежащие левее R оказываются точками сходимости, и даже абсолютной, правее — точками расходимости. Что касается точек с отрицательными абсциссами, то здесь происходит *обратное* явление по отношению к точке $-R$, т. е. точки правее $-R$ являются точками абсолютной сходимости, а левее — точками расходимости (черт. 17). Все это, как мы видели, есть прямое следствие теоремы Абеля.

Случаи 1) и 2) принято включать в этот последний случай, считая, что в первом из них интервал сходимости „выродился“ в одну точку 0, а во втором — „превратился“ во всю прямую.

Число R условились называть *радиусом сходимости;* когда интервал вырождается в точку, то $R=0$, если же он превращается во всю прямую, то мы считаем $R=+\infty$.

Относительно поведения степенного ряда внутри интервала сходимости можно высказать следующую теорему:

Степенной ряд сходится равномерно во всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости.

Слово „внутри“ здесь опять понимается в узком смысле, т. е. ни один из концов рассматриваемого отрезка не должен совпадать ни с $-R$, ни с $+R$.

Если отрезок $(-\rho, +\rho)$ лежит целиком внутри интервала $(-R, +R)$, то это значит, что $\rho < R$. Возьмем какое-нибудь число ρ', которое лежит между ρ и R, т. е. $\rho < \rho' < R$. Так как точка с абсциссой ρ' лежит внутри интервала сходимости, то в ней ряд (a) сходится, и притом абсолютно. Это значит, что ряд

$$|a_0| + |a_1| \rho' + |a_2| \rho'^2 + \ldots + |a_n| \rho'^n + \ldots$$

есть сходящийся ряд. Но так как $\rho < \rho'$, то для всякой точки x интервала $(-\rho, +\rho)$ имеем:

$$|x| \leqslant \rho < \rho'$$

и, следовательно,

$$|a_n x^n| < |a_n| \rho'^n.$$

Это показывает, что на $(-\rho, +\rho)$ ряд (a) имеет члены меньшие, чем соответствующие члены некоторого сходящегося ряда из положительных чисел. Ряды, обладающие этим свойством, мы условились называть мажорируемыми, и в § 23 было доказано, что они равномерно сходятся. Таким образом, наше предложение доказано.

Займемся теперь вопросом о том, как найти величину радиуса сходимости. Во многих случаях радиус сходимости степенного ряда бывает легко определить. Это имеет место тогда, когда существует

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, как всегда, — коэфициенты степенного ряда. Действительно, в этом случае, полагая

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

имеем:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L |x|,$$

а потому, на основании признака Коши (§ 10), ряд сходится абсолютно при $L|x| < 1$ и расходится при $L|x| > 1$. Следовательно, если $L \neq 0$, то

для $|x| < \frac{1}{L}$ ряд сходится абсолютно,

для $|x| > \frac{1}{L}$ ряд расходится.

Эти соотношения показывают, что число $\frac{1}{L}$ и есть как раз то число, которое отделяет точки сходимости от точек расходимости, т. е. радиус сходимости.

Итак,

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Заметим, что если $L = 0$, то при всяком x имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = 0$, а потому ряд сходится для всех значений x, т. е. радиус сходимости R

следует считать бесконечным. Если бы мы имели $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$, то для всякого x, кроме $x=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=+\infty$, а потому, на основании замечания в конце § 15, ряд расходится. Поэтому ряд расходится для всех значений x, кроме $x=0$. В этом случае радиус сходимости $R=0$.

Для удобства запоминания можно считать, что всегда $R=\frac{1}{L}$, если только условиться, что символ $\frac{1}{0}$ мы будем понимать как ∞, а символ $\frac{1}{\infty}$ как 0. Но, разумеется, реальный математический смысл этих символов состоит только в том, как уже выше говорилось, что при $L=0$ ряд всюду сходится, а при $L=\infty$ ряд всюду расходится, кроме $x=0$.

Прежде чем переходить к примерам, покажем еще, что радиус сходимости можно определять и иначе, пользуясь вместо признака Коши признаком Даламбера.

Действительно, допустим, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|;$$

обозначим этот предел опять буквой L:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L|x|.$$

Теперь, на основании признака Даламбера, совершенно так же, как выше на основании признака Коши, заключаем, что

при $|x|<\frac{1}{L}$ ряд сходится абсолютно,

при $|x|>\frac{1}{L}$ ряд расходится.

Значит, снова $R=\frac{1}{L}$, если только $L\neq 0$. Если $L=0$, то для любого x ряд сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=0.$$

Наконец, если $L=\infty$, то для всякого x, кроме $x=0$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=+\infty,$$

а потому, на основании замечания в конце § 15, ряд расходится. Значит, при $L=+\infty$ ряд расходится для всех значений x, кроме $x=0$.

Сравнение полученных результатов показывает, что если

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

существуют, то они равны между собой[1]).

Итак, мы теперь имеем два способа нахождения радиуса сходимости степенного ряда. Мы будем применять каждый раз тот из них, который более удобен для данного ряда, подобно тому как для числовых рядов применяли при разных случаях разные признаки сходимости.

Рассмотрим некоторые примеры на определение радиуса сходимости степенных рядов и изучим поведение этих рядов в концах интервала сходимости.

Пример 1. Возьмем ряд

$$1+2x+2^2x^2+\ldots+2^nx^n+\ldots. \tag{1}$$

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n}=2;$$

поэтому $R=\frac{1}{2}$; значит, интервал сходимости есть $\left(-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2}\right)$. Исследуем, как ведет себя ряд в концах этого интервала. Имеем для $x=\frac{1}{2}$ ряд:

$$1+2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+2^n\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

т. е. ряд

$$1+1+1+\ldots+1+\ldots;$$

этот ряд, разумеется, расходится. Точно так же для $x=-\frac{1}{2}$ найдем:

$$1-2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{2^2}-\ldots+(-1)^n2^n\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$$

или

$$1-1+1-1+\ldots;$$

этот ряд тоже расходится, ибо его члены не стремятся к нулю. Итак, ряд (1) в концах интервала сходимости расходится.

Пример 2. Дан ряд:

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots.$$

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1;$$

поэтому $R=\frac{1}{1}=1$. Интервал сходимости есть $(-1,\ +1)$. В правом конце этого интервала, т. е. при $x=1$, получается

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots;$$

[1]) Возможен случай, когда второго из этих пределов нет, а первый существует; здесь, однако, мы этого показывать не будем.

этот ряд, как мы знаем, сходится, но не абсолютно (§ 14). В левом конце интервала сходимости, т. е. при $x=-1$, получим:

$$-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots;$$

этот ряд расходится, так как образуется из гармонического умножением всех членов его на -1.

Итак, может случиться, что в одном конце интервала сходимости ряд сходится, а в другом расходится.

Пример 3. Дан ряд:

$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots.$$

Здесь имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1.$$

Следовательно, опять $(-1, +1)$ есть интервал сходимости. Но на этот раз ряд сходится, и притом абсолютно, в обоих концах интервала сходимости. Действительно, имеем при $x=1$:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

а при $x=-1$

$$-\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\ldots;$$

первый из этих рядов сходится (§ 11), а следовательно, сходится и второй, и притом абсолютно.

Значит, ряд может сходиться, и даже абсолютно, в обоих концах интервала сходимости.

§ 30. Непрерывность суммы степенного ряда.

Рассмотрим степенной ряд:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \qquad (a)$$

и пусть $(-R, +R)$ есть его интервал сходимости. Докажем, что **во всяком интервале $(-\rho, +\rho)$, лежащем целиком внутри интервала сходимости, сумма $F(x)$ степенного ряда есть непрерывная функция.**

В самом деле, если интервал $(-\rho, +\rho)$ лежит целиком внутри интервала сходимости, то, на основании теоремы, доказанной в § 29, ряд сходится *равномерно* на $(-\rho, +\rho)$, а потому (§ 24) его сумма непрерывна на этом интервале.

Полезно заметить, что мы, таким образом, убедились в непрерывности суммы степенного ряда во всякой точке, лежащей внутри интервала сходимости, так как каждую такую точку можно поместить в некоторый интервал $(-\rho, +\rho)$, целиком лежащий в $(-R, +R)$. Но нельзя говорить о непрерывности суммы в концах интервала хотя бы уже потому, что такой суммы может не быть: ряд может расходиться. Однако, если ряд сходится в одном из этих концов, то из предыдущих рассмотрений ясно, что сумма его будет непрерывна не только внутри интервала, но и в этом конце.

§ 31. Диференцирование степенного ряда.

Мы доказали, что сумма степенного ряда есть непрерывная функция $F(x)$ во всякой точке, лежащей строго внутри интервала сходимости. Докажем сейчас нечто большее, а именно, что в том же интервале функция $F(x)$ непременно имеет производную, причем найти эту производную можно просто почленным диференцированием степенного ряда, подобно тому как производную суммы конечного числа слагаемых находят при помощи сложения производных от каждого слагаемого в отдельности. Этот факт, указывающий на сходство между степенными рядами и, например, обыкновенными многочленами, является следствием следующей теоремы:

Если степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

имеет $(-R, +R)$ интервалом сходимости и функцию $F(x)$ своей суммой, то ряд, полученный путем его почленного диференцирования, т. е. ряд

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots \qquad (2)$$

имеет тот же интервал сходимости и сумму, равную производной $F'(x)$ от функции $F(x)$.

Чтобы убедиться в этом, докажем прежде всего, что ряд (2) мажорируем на всяком интервале $(-\rho, +\rho)$, целиком лежащем внутри интервала сходимости.

Действительно, если ξ есть такая точка, что $\rho < \xi < R$, то ряд (1) в этой точке сходится, поэтому n-й член $a_n \xi^n$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Значит, можно указать такое число M, что

$$|a_n \xi^n| < M, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Если $|x| \leqslant \rho$, то

$$|na_n x^{n-1}| \leqslant |na_n \rho^{n-1}| = n|a_n \xi^{n-1}| \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{n-1} < n\frac{M}{\xi} q^{n-1},$$

где $q = \frac{\rho}{\xi} < 1$, так как $\rho < \xi$ по условию. Поэтому, если мы убедимся в сходимости ряда

$$\frac{M}{\xi}(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots)$$

с положительными членами, то тем самым будет доказано, что ряд (2) мажорируем на $(-\rho, +\rho)$. В сходимости же последнего ряда можно убедиться, хотя бы применяя признак Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)q^{n-2}} = q < 1.$$

Итак, мы видим, что на любом отрезке $(-\rho, +\rho)$, лежащем целиком внутри интервала сходимости $(-R, +R)$, ряд (2) мажорируем. В таком случае, применяя теорему § 23, мы видим, что ряд (2) сходится равномерно на $(-\rho, +\rho)$, а потому (§ 26) он имеет суммой производную $F'(x)$ от функции $F(x)$. Значит, мы убедились в законности почленного диференцирования степенного ряда во всякой точке, лежащей внутри интервала сходимости.

Так как в интервале, где ряд мажорируем, он является абсолютно сходящимся (§ 23), то мы убеждаемся, что ряд (2) сходится абсолютно внутри интервала сходимости ряда (1). Докажем теперь, что вне этого интервала ряд (2) расходится. Действительно, если бы в некоторой точке ξ, такой, что $|\xi| > R$, ряд (2) был сходящимся, то для всякого x, $|x| < \xi$, этот ряд сходился бы абсолютно; значит, нашлось бы такое x', $|x'| > R$, при котором ряд

$$|a_1| + 2\,|a_2|\,|x'| + 3\,|a_3|\,|x'|^2 + \ldots + n\,|a_n|\,|x'|^{n-1} + \ldots$$

сходится. Но тогда сходится и ряд, полученный умножением всех членов предыдущего ряда на $|x'|$, т. е. ряд

$$|a_1|\,|x'| + 2\,|a_2|\,|x'|^2 + 3\,|a_3|\,|x'|^3 + \ldots + n|a_n|\,|x'|^n + \ldots,$$

а потому тем более должен сходиться и ряд

$$|a_1x'| + |a_2x'|^2 + |a_3x'|^3 + \ldots + |a_nx'|^n + \ldots,$$

ибо

$$|a_n|\,|x'|^n < n|a_n|\,|x'|^n.$$

Отсюда вытекает, что ряд (1) сходится в точке x', что невозможно, ибо $|x'| > R$, т. е. точка x' лежит вне интервала сходимости ряда (1). Из полученного противоречия мы заключаем, что ряд (2) обязан расходиться всюду вне $(-R, +R)$. Мы убедились, таким образом, что оба ряда (1) и (2) имеют один и тот же интервал сходимости, а это и заканчивает доказательство предложенной теоремы.

Добавим к этому, что в самых концах интервала сходимости ряды (1) и (2) могут вести себя не одинаково: может случиться, что данный ряд сходится, а продиференцированный расходится. Это имеет место, например, для ряда

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

который при $x = -1$ сходится, тогда как продиференцированный ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

в этой точке расходится.

Рассмотрим пример на диференцирование степенного ряда. Пусть дан ряд

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots.$$

Этот ряд есть геометрическая прогрессия со знаменателем $-x$. Его интервал сходимости есть $(-1, +1)$. Сумма $F(x)$ этого ряда есть

$$F(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Применяя только что доказанную теорему, мы видим, что ряд, полученный почленным диференцированием, т. е. ряд

$$-1 + 2x - 3x^2 + \ldots + (-1)^n nx^{n-1} + \ldots,$$

имеет тот же интервал сходимости $(-1, +1)$, причем его сумма должна быть равна

$$F'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

§ 32. Ряд Маклорена. Единственность разложения функции в степенной ряд.

Мы видели в предыдущем параграфе, что если степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{1}$$

имеет интервал сходимости $(-R, +R)$ и сумму $F(x)$, то ряд

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \tag{2}$$

полученный почленным диференцированием данного ряда, имеет тот же интервал сходимости и сумму $F'(x)$, равную производной от $F(x)$. Но ряд (2) есть снова степенной ряд; поэтому к нему можно применить ту же теорему и убедиться, что ряд

$$1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + \ldots + (n-1)\,na_nx^{n-2} + \ldots$$

имеет интервалом сходимости интервал $(-R, +R)$ и суммой функцию $F''(x)$, равную производной $F'(x)$, т. е второй производной от $F(x)$. Повторяя это рассуждение, приходим к следующему выводу:

Если степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

сходится к функции $F(x)$ и имеет интервал сходимости $(-R, +R)$, то функция $F(x)$ имеет внутри этого интервала производные всех порядков, причем для нахождения этих производных достаточно диференцировать заданный ряд почленно столько раз, каков порядок производной; все получаемые при этом ряды имеют тот же интервал сходимости $(-R, +R)$.

Таким образом можно написать:

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$
$$F'(x) = 1\cdot a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,$$
$$F''(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + \ldots + (n-1)\,na_nx^{n-2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F^{(p)}(x) = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot pa_p + 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p+1)\,a_{p+1}x + \ldots + (n-p+1)\,(n-p+2)\cdot\ldots\cdot na_nx^{n-p} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Каждый из этих рядов сходится на интервале $(-R, +R)$. В частности, положив в этих рядах $x = 0$, мы увидим, что каждый ряд сводится к одному своему постоянному члену

$$F(0) = a_0, \quad F'(0) = a_1, \quad F''(0) = 1\cdot 2a_2, \ \ldots,$$
$$F^{(p)}(0) = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot pa_p, \ \ldots .$$

Это показывает, что коэфициенты степенного ряда выражаются вполне определенным образом через величину функции $F(x)$ и ее производных в точке 0, а именно:

$$a_0 = F(0), \quad a_1 = \frac{F'(0)}{1}, \quad a_2 = \frac{F''(0)}{1\cdot 2}, \ \ldots, \ a_p = \frac{F^{(p)}(0)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p}, \ \ldots .$$

Таким образом, если функция $F(x)$ может быть разложена в степенной ряд, т. е. **если существует степенной ряд, сходящийся к $F(x)$ в некотором интервале, то такой ряд только один, а именно, ряд**

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}F''(0)+\ldots+$$
$$+\frac{x^p}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p}F^{(p)}(0)+\ldots.$$

Разумеется, не всякую функцию можно разложить в степенной ряд: как показывает предыдущая формула, для этого прежде всего необходимо, чтобы она имела производные всех порядков в точке $x=0$, и, как показывают более детальные исследования, этого одного еще недостаточно. Тем не менее для всех простых и постоянно встречаемых в Анализе функций такое разложение возможно, и мы теперь знаем, как его найти; для этого достаточно найти производные от нашей функции в точке $x=0$ и затем составить ряд

$$F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}F''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}F^{(n)}(0)+\ldots$$

Этот ряд носит название *ряда Маклорена* и играет важную роль в Анализе. Мы рассмотрим в дальнейшем целый ряд примеров разложения функций в ряд Маклорена, но сейчас нам необходимо остановиться еще на одном вопросе, естественно возникающем после того, как мы убедились в возможности диференцировать степенной ряд. Это вопрос об интегрировании этих рядов. Лишь после того, как этот вопрос будет разобран, у нас окажутся все средства для разложения функций в ряды.

§ 33. Интегрирование степенных рядов.

Пусть степенной ряд

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

имеет интервал сходимости $(-R, +R)$ и пусть $F(x)$ есть его сумма. В § 29 мы видели, что степенной ряд сходится равномерно во всяком интервале $(-\rho, +\rho)$, если только $\rho<R$. На основании теоремы § 25 мы отсюда заключаем, что степенной ряд можно интегрировать почленно на $(-\rho, +\rho)$. В частности, отсюда вытекает справедливость формулы

$$\int_0^x F(x)\,dx=\int_0^x a_0\,dx+\int_0^x a_1x\,dx+\ldots+\int_0^x a_nx^n dx+\ldots,$$

или

$$\int_0^x F(x)\,dx=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots \tag{2}$$

для любого x, $-\rho\leqslant x\leqslant\rho$. Но так как для всякого x, $-R<x<R$, можно найти такое ρ, что $-\rho\leqslant x\leqslant\rho$, то последняя формула справедлива на всем интервале сходимости степенного ряда (1).

Ряд, стоящий в правой части формулы (2), должен иметь интервалом сходимости интервал $(-R, +R)$. Действительно, мы видели, что он сходится в каждой точке внутри $(-R, +R)$; значит, интервал сходимости этого ряда должен содержать $(-R, +R)$ или совпадать с ним. Покажем, что возможен только последний случай, т. е. интервал сходимости проинтегрированного ряда должен опять быть интервалом $(-R, +R)$. Действительно, если бы этот интервал был $(-R', +R')$, где $R' > R$, то, на основании теоремы § 31, ряд (1), полученный почленным диференцированием ряда (2), имел бы также интервалом сходимости $(-R', +R')$, что неверно, ибо его интервал сходимости есть $(-R, +R)$. Итак, проинтегрированный ряд имеет тот же интервал сходимости, что и данный.

Положим

$$\Phi(x) = \int_0^x F(x)\,dx;$$

тогда

$$\Phi'(x) = F(x),$$

и, следовательно, $\Phi(x)$ есть примитивная функция для $F(x)$ или, говоря точнее, одна из примитивных для $F(x)$, так как примитивных функций существует бесконечное множество: любая функция $\Phi_1(x)$, отличающаяся от $\Phi(x)$ лишь на постоянное, будет также примитивной для $F(x)$. Можно добавить, что $\Phi(x)$ есть та из примитивных для $F(x)$, которая обращается в 0 при $x = 0$, ибо ряд (2) имеет при $x = 0$ сумму, равную нулю. Суммируя сказанное, можно формулировать следующую теорему:

Если степенной ряд

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

сходится на $(-R, +R)$ и имеет сумму $F(x)$, то ряд, полученный формальным интегрированием его почленно, т. е. ряд

$$a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots,$$

имеет тот же интервал сходимости, и его сумма есть та из примитивных для $F(x)$, которая обращается в 0 при $x = 0$.

Например, мы знаем, что ряд

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,$$

который можно рассматривать как геометрическую прогрессию со знаменателем $-x^2$, сходится для $x^2 < 1$ и расходится для $x^2 \geqslant 1$, т. е. его интервал сходимости есть $(-1, +1)$. Сумма этого ряда есть $\frac{1}{1+x^2}$. Поэтому ряд, полученный почленным интегрированием данного ряда, должен иметь суммой примитивную для $\frac{1}{1+x^2}$, превращающуюся в 0 при $x = 0$. Такой примитивной будет $\operatorname{arctg} x$, а потому мы получаем равенство

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \tag{3}$$

справедливое при $-1 < x < +1$. Это равенство продолжает сохранять силу и при $x = +1$, так как ряд (3) сходится для $x = 1$ (§ 14), значит, его сумма непрерывна и при $x=1$ (§ 30), а потому она равна $\operatorname{arctg} 1$. При $x=+1$ формула дает:

$$\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

и позволяет приближенно вычислить число π. Впрочем, для π можно найти значительно лучшие разложения, т. е. ряды, которые сходятся гораздо быстрее, а потому позволяют легко вычислить число π с большой точностью.

§ 34. Ряды Тейлора и Маклорена.

Мы видели в § 32, что если функция $F(x)$ допускает разложение в степенной ряд, то это должен быть ряд

$$F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)+\ldots,$$

носящий название ряда Маклорена. Но, как показывает уже сама эта формула, для разложимости функции в ряд Маклорена надо, чтобы она в точке $x=0$ имела производные всех порядков. Между тем функция может оказаться диференцируемой сколько угодно раз в других точках, но в точке 0 либо сама она, либо ее производные могут стать бесконечными. Например, функция $\ln x$ для всех значений x, кроме $x=0$, имеет конечную производную $\frac{1}{x}$, конечную вторую производную $-\frac{1}{x^2}$, вообще конечные производные всех порядков, но при $x=0$ значения и самой функции и всех ее производных перестают быть конечными.

В этом случае можно искать разложения такой функции в степенной ряд, расположенный не по степеням x, а по степеням $x-a$, где a — какое-нибудь постоянное число, для которого сама функция и все ее производные конечны. В самом деле, если мы перенесем начало координат в точку a, положив $x=a+h$, где h — новое переменное, то $F(x)=F(a+h)$ станет некоторой функцией от h; обозначим ее через $\varphi(h)$, т. е. положим

$$\varphi(h)=F(a+h);$$

тогда

$$\varphi'(h)=F'(a+h),\ \varphi''(h)=F''(a+h),\ \ldots,$$
$$\varphi^{(n)}(h)=F^{(n)}(a+h),\ \ldots.$$

Так как при $h=0$ у нас получится

$$\varphi(0)=F(a),\ \varphi'(0)=F'(a),\ \varphi''(0)=F''(a),\ \ldots,$$
$$\varphi^{(n)}(0)=F^{(n)}(a),\ \ldots,$$

то для функции $\varphi(h)$ можно составить ряд Маклорена:

$$\varphi(0)+\frac{h}{1}\varphi'(0)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{h^n}{h!}\varphi^{(n)}(0)+\ldots,$$

или

$$F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\frac{h^2}{2!}F''(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a)+\ldots.$$

Замечая теперь, что $a+h=x$, а значит, $h=x-a$, мы получаем степенной ряд, расположенный по степеням разности $x-a$:

$$F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}F''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+\ldots.$$

Этот ряд носит название *ряда Тейлора* для $F(x)$.

Таким образом, **если функция $F(x)$ допускает разложение в ряд по степеням разности $x-a$, то это разложение должно получаться в виде ряда Тейлора.** Это утверждение вытекает из того факта, что если функция разложима в степенной ряд, то только одним способом, и мы теперь видим, каким именно способом. Однако мы не имеем никаких оснований утверждать, что, взяв функцию $F(x)$, которая имеет производные всех порядков, и составив для нее разложение в ряд по формуле Маклорена или по формуле Тейлора, мы получим ряд, который сходится и притом имеет суммой $F(x)$. Ввиду важности этого вопроса мы еще раз остановимся на нем.

Мы видели (§ 32), что если $F(x)$ есть сумма некоторого степенного ряда, сходящегося на интервале $(-R,+R)$,

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

то можно утверждать, что коэфициенты этого ряда должны получаться по формулам:

$$a_0=F(0),\ a_1=\frac{F'(0)}{1},\ldots,a_n=\frac{F^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots.$$

Поэтому, если, *по условию*, ряд сходится к $F(x)$, то мы можем писать в интервале его сходимости равенство

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)+\ldots.$$

Подобно этому мы сейчас убедились, что *если* $F(x)$ есть сумма сходящегося ряда, расположенного по возрастающим степеням $x-a$, то это должен быть ряд Тейлора, и мы тогда можем писать:

$$F(x)=F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}F''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+\ldots.$$

Однако из сказанного еще не следует, что, взяв какую-нибудь функцию $F(x)$, имеющую все производные, и составив для нее ряд по формуле Маклорена или по формуле Тейлора, мы можем быть уверены в его сходимости к $F(x)$; может оказаться, что этот ряд расходится или сходится, но не к функции $F(x)$.

Пусть, например,

$$F(x)=e^{-\frac{1}{x}}\quad\text{для}\quad x>0,$$
$$F(x)=0\quad\text{для}\quad x\leqslant 0.$$

Для всякого $x>0$ функция имеет производные всех порядков, которые могут быть найдены по обычным правилам диференцирования. А именно, для $x>0$ мы имеем:

$$F'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}},$$

$$F''(x)=\left(-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}},$$

$$F'''(x)=\left(\frac{6}{x^4}-\frac{6}{x^5}+\frac{1}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

и вообще при всяком n

$$F^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}},$$

где $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ есть многочлен относительно $\frac{1}{x}$.

Чтобы найти величины $F^{(n)}(0)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, нельзя просто подставлять $x=0$ в эти формулы, так как они утрачивают смысл и, кроме того, справедливы лишь для $x>0$, а нужно поступать так: по самому определению производной можно для любой функции $\varphi(x)$ писать:

$$\varphi'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h},$$

если только предел в правой части равенства существует. Именно по этой формуле мы и должны находить все $F^{(n)}(0)$, $n=1, 2, 3, \ldots$.

Предварительно докажем, что если $x\to 0$ и $x>0$, то

$$\lim P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}=0,$$

каков бы ни был многочлен $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$. Действительно, полагая $\frac{1}{x}=y$, мы видим, что если $x\to 0$, причем $x>0$, то $y\to+\infty$, а потому нам достаточно доказать, что

$$\lim_{y\to+\infty}P_n(y)\,e^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{P_n(y)}{e^y}=0.$$

Но мы знаем, что, продифференцировав многочлен k-й степени k раз, мы получим постоянное число; поэтому, применяя правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{P_n(y)}{e^y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{P'_n(y)}{e^y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{P''_n(y)}{e^y}=\ldots=\lim_{y\to+\infty}\frac{C}{e^y}=0,$$

где через C мы обозначили постоянное число.

Установив это, мы можем сказать, что если $x>0$ и $x\to 0$, то

$$\lim\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}=0$$

по только что доказанному. Если же $x\to 0$, но $x<0$, то $F(x)=0$, а потому

$$\lim\frac{F(x)-F(0)}{x}=0.$$

Следовательно, $\frac{F(x)-F(0)}{x}\to 0$, как бы x ни стремилось к нулю, а потому

$$F'(0)=0.$$

Чтобы найти $F''(0)$, надо найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}$; но так как для $x<0$ имеем $F'(x)=0$ и $F'(0)=0$, то при $x<0$ и $x\to 0$ выражение $\frac{F'(x)-F'(0)}{x}$, оставаясь все время равным нулю, имеет пределом нуль. Если же $x\to 0$, но $x>0$, то

$$\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}},$$

а потому его предел тоже равен нулю при $x\to 0$ по доказанному выше. Это значит, что

$$F''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=0.$$

Продолжая это рассуждение, мы убедимся, что

$$F^{(n)}(0)=0, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \dots.$$

Итак,

$$F(0)=F'(0)=F''(0)=\dots=F^{(n)}(0)=\dots=0,$$

а потому ряд Маклорена для рассматриваемой функции $F(x)$ имеет вид:

$$0+0\cdot\frac{x}{1!}+0\cdot\frac{x^2}{2!}+\dots+0\cdot\frac{x^n}{n!}+\dots,$$

т. е. сходится к 0 для всех x, а между тем $F(x)$ ни при каком положительном значении x не равна нулю.

Поэтому, когда хотят разложить заданную функцию $F(x)$ в степенной ряд, то поступают следующим образом: прежде всего формально составляют для нее ряд Маклорена, если она имеет конечные производные всех порядков при $x=0$, или ряд Тейлора, если для точки $x=0$ это невозможно, а для некоторого $x=a$ возможно, причем формально составить ряд — это значит просто вычислить его коэфициенты. Далее, начинают исследовать, сходится ли этот ряд; если окажется, что он сходится в некотором интервале, то нельзя еще сразу утверждать, что его сумма есть данная функция $F(x)$. Существуют два метода, с помощью которых можно узнать, будет ли сумма ряда равна $F(x)$. Один из них, искусственный, но обыкновенно более легкий, состоит в том, что, пользуясь свойствами полученного при помощи диференцирования и других операций ряда, стараются установить, является ли данная функция суммой рассматриваемого ряда (как это сделать, удобнее всего выяснить на примерах, так как нет общего приема, годного для всех рядов). Второй метод прямой, но по большей части очень трудно применимый, состоит в том, что разность между $F(x)$ и первыми n членами ее ряда Тейлора изучают непосредственно и пытаются установить, когда она стремится к нулю с возрастанием n. Второй метод мы изучим в дальнейшем, когда покажем, как эту разность, т. е. так называемый остаток ряда Тейлора, изображать в удобной форме, а сейчас укажем, какой вид имеют ряды Маклорена для наиболее часто встречающихся в Анализе функций, и при помощи первого метода обнаружим их сходимость к этим функциям.

§ 35. Разложение в ряд для функции e^x.

Поставим себе задачей разложить в ряд функцию e^x. Имеем:

$$F(x)=e^x,$$
$$F'(x)=e^x,$$
$$F''(x)=e^x,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$F^{(n)}(x)=e^x,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ;$$

поэтому

$$F(0)=F'(0)=F''(0)=\ldots=F^{(n)}(0)=\ldots=1.$$

Значит, ряд Маклорена может быть написан; он имеет вид:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots .$$

Теперь надо исследовать, сходится ли этот ряд, и если сходится, то будет ли e^x его суммой. В § 28 мы доказали, что этот ряд сходится при всех значениях x. Обозначив через $f(x)$ сумму этого ряда, имеем:

$$f(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots .$$

Но мы еще не знаем, будет ли $f(x)=e^x$. Для решения этого вопроса прежде всего заметим, что всякий степенной ряд можно диференцировать почленно в том интервале, где он сходится, причем продиференцированный ряд имеет сумму, равную производной от суммы данного ряда. Это позволяет нам написать:

$$f'(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots .$$

Мы видим, что продиференцированный ряд совпадает с первоначальным, а потому и суммы их равны между собой; следовательно, $f'(x)=$ $=f(x)$, или $\frac{f'(x)}{f(x)}=1$; а так как $\frac{f'(x)}{f(x)}$ есть производная от $\ln f(x)$, то $[\ln f(x)]'=1$; следовательно,

$$\ln f(x)=x+C,$$

где C — постоянное. Отсюда

$$f(x)=e^{x+C}.$$

Остается еще заметить, что при $x=0$ все члены исследуемого ряда, кроме свободного члена, обращаются в 0, а потому $f(0)=1$. Но если $f(x)=e^{x+C}$ и $f(0)=1$, то, значит, $e^C=1$, а потому

$$f(x)=e^xe^C=e^x,$$

что и требовалось доказать.

Итак, мы имеем:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots ,$$

причем это равенство справедливо при всех значениях x. В частности, при $x=1$ имеем ряд, позволяющий вычислить величину e:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

Этот ряд чрезвычайно быстро сходится, и потому величину e можно найти с очень большой точностью, взяв сравнительно небольшое число членов этого ряда. Действительно, обозначая через R_n остаток ряда, т. е. полагая

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots,$$

имеем:

$$R_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right].$$

Так как каждый член ряда, стоящего в скобках, начиная со второго, меньше, чем соответствующий член геометрической прогрессии

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots,$$

то

$$0<R_n<\frac{1}{n!}\cdot\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}.$$

Это значит, что, заменив e через

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

мы совершаем ошибку меньшую, чем $\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}$.

В частности, например, при $n=8$ ошибка будет меньше, чем

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{322560}.$$

Если, производя вычисление, мы будем при обращении простых дробей в десятичные обрывать вычисление на пятом десятичном знаке, то найдем, останавливаясь на восьмом члене,

$$e=2{,}71825,$$

где первые 4 десятичных знака верны.

§ 36. Разложение в ряд функций $\sin x$ и $\cos x$.

Для того чтобы составить ряды для этих функций, надо прежде всего найти все их производные. Полагая $F(x)=\sin x$ и $\Phi(x)=\cos x$, имеем:

$$\begin{aligned}
F(x)&=\sin x, & \Phi(x)&=\cos x,\\
F'(x)&=\cos x, & \Phi'(x)&=-\sin x,\\
F''(x)&=-\sin x, & \Phi''(x)&=-\cos x,\\
F'''(x)&=-\cos x, & \Phi'''(x)&=\sin x,\\
F^{(IV)}(x)&=\sin x, & \Phi^{(IV)}(x)&=\cos x,\\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Так как для обеих функций четвертая производная совпадает с самой функцией, то закон получения производных ясен:

$$F^{(4n)}(x) = F(x),\ F^{(4n+1)}(x) = F'(x),\ F^{(4n+2)}(x) = F''(x),$$
$$F^{(4n+3)}(x) = F'''(x)$$

для любого целого n и аналогично для $\Phi(x)$. Так как

$$F(0) = 0,\ F'(0) = 1,\ F''(0) = 0,\ F'''(0) = -1,$$

то

$$F^{(4n)}(0) = 0,\ F^{(4n+1)}(0) = 1,\ F^{(4n+2)}(0) = 0,$$
$$F^{(4n+3)}(0) = -1.$$

Таким образом ряд Маклорена для функции $F(x) = \sin x$ имеет вид:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots . \tag{1}$$

Аналогично для $\cos x$, заметив, что

$$\Phi(0) = 1,\ \Phi'(0) = 0,\ \Phi''(0) = -1,\ \Phi'''(0) = 0,$$

найдем ряд

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots . \tag{2}$$

Оба эти ряда сходятся при всех значениях x; действительно, мы знаем, что ряд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

сходится, и притом абсолютно, для всех x; отсюда следует, что для любого x ряды

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^3}{3!} + \frac{|x|^5}{5!} + \ldots + \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

сходятся, а это и доказывает, что ряды (1) и (2) сходятся абсолютно для всех x.

Теперь необходимо показать, что эти всюду сходящиеся ряды имеют в качестве сумм именно функции $\sin x$ и $\cos x$.

Обозначая через $\varphi(x)$ сумму ряда (1) и замечая, что ряд (2) является результатом почленного диференцирования ряда (1), заключаем, что сумма второго ряда есть $\varphi'(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \tag{1}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots . \tag{2}$$

Диференцируя теперь почленно ряд (2), получим:

$$\varphi''(x) = -\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots,$$

но этот ряд совпадает с первым рядом, если все знаки в нем переменить на обратные; отсюда заключаем, что

$$\varphi''(x) = -\varphi(x). \tag{3}$$

Заметим, кроме того, что

$$\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=1, \tag{4}$$

в чем мы убеждаемся простой подстановкой $x=0$ в ряды (1) и (2).

Соотношений (3) и (4) достаточно для того, чтобы доказать, что $\varphi(x)=\sin x$. Не имея возможности прибегать к результатам, получаемым из общей теории диференциальных уравнений и позволяющим прямым путем притти к этому следствию[1]), мы воспользуемся искусственным приемом. Прежде всего убедимся, что

$$\varphi(x)\cos x-\varphi'(x)\sin x$$

есть постоянная величина. Действительно, ее производная равна нулю, ибо

$$\varphi'(x)\cos x-\varphi(x)\sin x-\varphi''(x)\sin x-\varphi'(x)\cos x=0,$$

так как $\varphi(x)=-\varphi''(x)$. Полагая $x=0$ и пользуясь равенством (4), видим, что

$$\varphi(x)\cos x-\varphi'(x)\sin x=0, \tag{5}$$

ибо левая часть постоянна и обращается в нуль при $x=0$.

Покажем теперь, что

$$\varphi(x)\sin x+\varphi'(x)\cos x=1. \tag{6}$$

Действительно, у функции $\varphi(x)\sin x+\varphi'(x)\cos x$ производная равна нулю, ибо

$$\varphi'(x)\sin x+\varphi(x)\cos x+\varphi''(x)\cos x-\varphi'(x)\sin x=0$$

в силу равенства $\varphi(x)=-\varphi''(x)$. Значит, рассматриваемая функция $\varphi(x)\sin x+\varphi'(x)\cos x$ постоянна, а так как она равна 1 при $x=0$ в силу $\varphi'(0)=1$, то равенство (6) доказано.

Но тогда из равенств (5) и (6), рассматривая их как уравнения для определения $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$, находим:

$$\varphi(x)=\sin x,\ \varphi'(x)=\cos x.$$

Это позволяет окончательно написать:

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots.$$

Способ, которым мы доказали, что $\varphi(x)=\sin x$, не может не вызвать некоторого чувства неудовлетворенности. В самом деле, он является абсолютно строгим, но в то же время чересчур искусственным. Правда, можно дать некоторое объяснение, почему мы стали доказывать справедливость равенств (5) и (6): предвидя, что наша функция $\varphi(x)$ окажется равной $\sin x$, мы стремились в сущности доказать тождества:

$$\sin x\cos x-\cos x\sin x=0$$

и

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

[1]) Функция $\varphi(x)$ есть решение диференциального уравнения $y''+y=0$; его общий интеграл есть $y=A\cos x+B\sin x$, где A и B — произвольные постоянные; замечая, что $\varphi(0)=0$ и $\varphi'(0)=1$, находим $A=0$, $B=1$, откуда $\varphi(x)=\sin x$.

но такого рода объяснение вряд ли может вполне примирить с этим способом. Кроме того, что́ более существенно, примеры разложения функции e^x в ряд и разложения $\sin x$ и $\cos x$ показывают, что приемы здесь для каждого случая особенные. Посмотрев, как мы убеждаемся в том, что ряд Маклорена сходится именно к той функции, для которой он был составлен, мы совершенно не знаем еще, как это будет доказываться в других случаях. Поэтому в следующем параграфе мы перейдем к изучению так называемых остаточных членов рядов Тейлора или Маклорена, так как получим тогда возможность, не прибегая к искусственным приемам, непосредственно решать вопрос о сходимости этих рядов к заданным функциям.

Прежде чем переходить к этому вопросу, остановимся еще на полученных рядах для $\sin x$ и $\cos x$. Мы уже видели, что эти ряды сходятся для всех значений x. Заметим, что сходятся они очень быстро. Но для того чтобы вычисления при помощи этих рядов стали возможно проще, стараются еще усилить их сходимость; ясно, что чем меньше x, тем ряды сходятся быстрее; поэтому, вместо того чтобы вычислять, например, $\sin x$ при данном x, мы при помощи элементарных формул тригонометрии сводим это к вычислению $\sin$ или $\cos$ от дуги, заключенной между 0 и $\frac{\pi}{4}$, а так как $\frac{\pi}{4} = 0{,}785\ldots$, то можно рассматривать наши ряды лишь для значений x, положительных и меньших, чем 1. В этом случае наши ряды будут знакочередующимися рядами, члены которых монотонно убывают, а потому, по теореме § 14, если мы оборвем ряд на n-м члене, то сделаем ошибку, абсолютная величина которой меньше абсолютной величины $n+1$-го члена.

Например, пусть нам надо вычислить $\sin \alpha$, где α удовлетворяет неравенству $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$; прежде всего мы напишем $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ и, обозначая $\pi - \alpha$ через β, заметим, что $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$. Теперь, взяв, например,

$$\sin \beta = \frac{\beta}{1} - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!},$$

мы совершаем ошибку, абсолютная величина которой меньше, чем

$$\frac{\beta^7}{7!} < \frac{\pi^7}{4^7 \cdot 5040}.$$

Так как $\frac{\pi}{4} = 0{,}785\ldots < 0{,}8$, то даже самый грубый подсчет показывает, что ошибка будет меньше, чем 0,0001. Таким образом, только трех членов ряда достаточно, чтобы уже весьма точно вычислить величину $\sin$ или $\cos$. Именно этим способом и составляются таблицы натуральных величин тригонометрических функций.

§ 37. Формулы Тейлора и Маклорена. Остаточный член в форме Лагранжа.

Предположим, что функция $F(x)$ есть сумма некоторого сходящегося степенного ряда; мы уже знаем, что в этом случае ряд будет рядом Маклорена, и можем написать:

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} F^{(n)}(0) + \ldots.$$

Спросим себя, какова будет ошибка, которую мы совершим, если заменим величину функции $F(x)$ суммой n первых членов сходящегося к ней ряда. Эта ошибка, которую мы будем обозначать через $R_n(x)$, есть разность

$$R_n(x) = F(x) - \left[F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} F^{(n)}(0)\right].$$

Чтобы оценить величину этой ошибки, мы введем одну общую формулу, которую принято называть формулой Маклорена[1]; она применима не только к функциям, допускающим разложение в сходящийся степенной ряд, но и к более широкому классу функций.

Итак, отвлечемся пока от рядов и будем просто рассматривать функцию $F(x)$, относительно которой известно, что она имеет непрерывные производные до $n+1$-го порядка включительно. Рассмотрим какую-нибудь точку $x = x_0$ и выясним, что можно сказать о величине

$$F(x_0) - \left[F(0) + \frac{x_0}{1} F'(0) + \ldots + \frac{x_0^n}{n!} F^{(n)}(0)\right].$$

Эта величина нам неизвестна, и мы будем стараться оценить ее приближенно. С этой целью запишем эту величину в виде $M \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}$, где M — неизвестное нам пока постоянное число, т. е. положим

$$F(x_0) - \left[F(0) + \frac{x_0}{1} F'(0) + \ldots + \frac{x_0^n}{n!} F^{(n)}(0)\right] = \frac{M x_0^{n+1}}{(n+1)!}$$

Записанная формула не содержит никакого утверждения; она просто служит определением неизвестной пока величины M. Что же касается того, почему мы не просто обозначили одной буквой разность, стоящую в левой части последнего равенства, а предпочли ее писать в виде $\frac{M x_0^{n+1}}{(n+1)!}$ и рассматривать как неизвестное число M, то это легко объяснить. Действительно, если бы $F(x)$ была суммой ряда Маклорена, то в точке x_0 мы имели бы:

$$F(x_0) - \left[F(0) + \frac{x_0}{1} F'(0) + \ldots + \frac{x_0^n}{n!} F^{(n)}(0)\right] = \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(0) + \\ + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} F^{(n+2)}(0) + \ldots,$$

откуда

$$F(x_0) - \left[F(0) + \frac{x_0}{1} F'(0) + \ldots + \frac{x_0^n}{n!} F^{(n)}(0)\right] = \\ = \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}\left[F^{(n+1)}(0) + \frac{x_0}{n+2} F^{(n+2)}(0) + \ldots\right] = \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} M,$$

где M есть сумма ряда, стоящего в квадратных скобках в правой части равенства.

---

[1] Собственно говоря, такое название, так же как и название „формула Тейлора", хотя и весьма употребительно, но неправильно, так как Тейлор и Маклорен пользовались лишь бесконечными рядами, а формулу с остаточным членом впервые вывел Лагранж.

В общем случае, когда неизвестно, может ли $F(x)$ быть суммой сходящегося ряда Маклорена, мы ищем выражение для разности

$$F(x_0)-\left[F(0)+\frac{x_0}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x_0^n}{n!}F^{(n)}(0)\right]$$

в той же форме $\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}M$, и оценка величины M дает нам возможность установить, можно или нельзя $F(x)$ разложить в ряд.

Вернемся к формуле

$$F(x_0)-\left[F(0)+\frac{x_0}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x_0^n}{n!}F^{(n)}(0)\right]=\frac{Mx_0^{n+1}}{(n+1)!},$$

где M — пока неизвестная величина, и будем стараться оценить эту величину. С этой целью введем вспомогательную функцию $\varphi(x)$, определяемую равенством

$$\varphi(x)=F(x)-F(0)-\frac{x}{1}F'(0)-\ldots-\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)-\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!},$$

где M — то же число, как и в предыдущей формуле. Сравнивая эту формулу с предыдущей, мы видим, что $\varphi(x_0)=0$. Кроме того, ясно, что $\varphi(0)=0$, так как в формуле, определяющей $\varphi(x)$, при подстановке 0 вместо x все члены, кроме, быть может, двух первых, обращаются в нуль, а два первых взаимно уничтожаются.

Заметим, что $\varphi(x)$ отличается от $F(x)$ на многочлен степени $n+1$; поэтому, если $F(x)$, по предположению, имела производные до $n+1$-го порядка, то это будет справедливо и для $\varphi(x)$. Вычислив эти производные для $\varphi(x)$, будем иметь:

$$\varphi'(x)=F'(x)-F'(0)-\frac{x}{1}F''(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(0)-\frac{Mx^n}{n!},$$

$$\varphi''(x)=F''(x)-F''(0)-\frac{x}{1}F'''(0)-\ldots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}F^{(n)}(0)-\frac{Mx^{n-1}}{(n-1)!},$$

. . . .

$$\varphi^{(n)}(x)=F^{(n)}(x)-F^{(n)}(0)-\frac{Mx}{1},$$

$$\varphi^{(n+1)}(x)=F^{(n+1)}(x)-M.$$

Но мы уже говорили, что $\varphi(0)=0$ и $\varphi(x_0)=0$. Отсюда, по теореме Ролля, заключаем, что найдется такая точка x_1, заключенная между 0 и x_0, для которой $\varphi'(x_1)=0$. С другой стороны, из самой формулы, выражающей $\varphi'(x)$, видно, что $\varphi'(0)=0$. Применяя опять теорему Ролля, заключаем, что найдется такая точка x_2 между 0 и x_1, в которой производная от $\varphi'(x)$, т. е. $\varphi''(x)$, обращается в нуль; значит, $\varphi''(x_2)=0$. Но, с другой стороны, $\varphi''(0)=0$, как показывает формула для $\varphi''(x)$. Снова применяем теорему Ролля и т. д. Увидим, наконец, что $\varphi^{(n)}(x)$ обратится в нуль в некоторой точке x_n и в точке 0; отсюда, в последний раз применяя теорему Ролля, выведем, что $\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})=0$, где x_{n+1} заключено между 0 и x_n, а значит, между 0 и x_0. Но $\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})=F^{(n+1)}(x_{n+1})-M$, а потому из $\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})=0$ следует, что

$$M=F^{(n+1)}(x_{n+1}).$$

Именно эту оценку мы и хотели получить. Таким образом, мы теперь можем написать:

$$F(x_0) = F(0) + \frac{x_0}{1} F'(0) + \ldots + \frac{x_0^n}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(x_{n+1}),$$

где про число x_{n+1} нам известно только то, что оно заключено между 0 и x_0.

Так как эта формула справедлива для любой точки x_0, то индекс 0 можно теперь уничтожить, лишь бы только $F(x)$ имела производные до $n+1$-го порядка для всякого из рассматриваемых значений x; тогда найдем:

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta x), \qquad (1)$$

где θ есть число, заключенное между 0 и 1 (так как в этом случае θx заключено между 0 и x).

Эта формула носит название *формулы Маклорена*, причем выражение

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta x)$$

есть так называемый *остаточный член* этой формулы, взятый *в форме Лагранжа* (мы увидим в дальнейшем, что иногда остаточный член записывают и в иных формах).

Если бы функция $F(x)$ была просто многочленом n-й степени, то мы имели бы $F^{(n+1)}(x) = 0$ при всех значениях x, и тогда предыдущая формула приняла бы вид:

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} F^{(n)}(0).$$

В общем же случае, когда $F(x)$ не есть многочлен, ясно, что остаточный член не равен нулю тождественно. Но если производная $n+1$-го порядка от $F(x)$ остается ограниченной около точки $x=0$, то можно сказать, что вблизи 0 функция $F(x)$ ведет себя почти как многочлен, так как остаточный член очень мал. В этом случае предыдущая формула дает очень простые приближенные выражения для $F(x)$ при x, близком к 0, а именно:

$$F(0),\ F(0) + \frac{x}{1} F'(0),\ F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0), \ldots .$$

Является, конечно, желательным иметь аналогичную формулу, которая позволит находить приближенные выражения для функции в соседстве с некоторой точкой $x=a$. Такую формулу легко получить. Предполагая, что $F(x)$ имеет производные до $n+1$-го порядка включительно в некотором интервале, содержащем точку a, и полагая $x = a+h$, будем рассматривать h как новое переменное и величину $F(x) = F(a+h)$ как функцию от h. Если $f(h) = F(a+h)$, то

$$\begin{gathered}
f'(h) = F'(a+h),\ f'(0) = F'(a), \\
f''(h) = F''(a+h),\ f''(0) = F''(a), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f^{(n)}(h) = F^{(n)}(a+h), \quad f^{(n)}(0) = F^{(n)}(a), \\
f^{(n+1)}(h) = F^{(n+1)}(a+h), \quad f^{(n+1)}(\theta h) = F^{(n+1)}(a+\theta h);
\end{gathered}$$

а потому, прилагая к $f(h)$ формулу Маклорена

$$f(h)=f(0)+\frac{h}{1}f'(0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta h),$$

найдем:

$$F(a+h)=F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a+\theta h), \tag{2}$$

где попрежнему имеем $0<\theta<1$.

Эта формула носит название *формулы Тейлора*, а выражение

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a+\theta h)$$

есть *остаточный член* этой формулы, взятый *в форме Лагранжа*.

Мы можем повторить здесь то, что раньше говорилось о формуле Маклорена: можно, если $F^{(n+1)}(x)$ остается ограниченной в соседстве с точкой $x=a$, заменять $F(a+h)$ приближенно через

$$F(a),\quad F(a)+\frac{h}{1}F'(a),\quad F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\frac{h^2}{2!}F''(a),\ldots.$$

Образно говоря, $F(a+h)$ вблизи точки a ведет себя почти как многочлен, расположенный по степеням h.

Формулу Тейлора записывают часто в иных формах. Например, заменяя $a+h$ через x, т. е. h через $x-a$, получим:

$$F(x)=F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+$$
$$+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}[a+\theta(x-a)].$$

Если в этой последней формуле положить $a=0$, можно снова получить формулу Маклорена.

Наконец, интересно отметить, что формулу Тейлора можно рассматривать как обобщение теоремы Лагранжа о конечном приращении. Если x равно некоторому постоянному числу b, то

$$F(b)=F(a)+\frac{b-a}{1}F'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}F''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+$$
$$+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}[a+\theta(b-a)].$$

Эта формула справедлива при всяком n, если только функция имеет производные до $n+1$-го порядка. В частности, при $n=0$ она дает:

$$F(b)=F(a)+\frac{b-a}{1}F'[a+\theta(b-a)].$$

Но так как $0<\theta<1$, то $a+\theta(b-a)$ есть число, заключенное между a и b. Обозначая это число через ξ, имеем:

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(\xi),$$

а это есть обычная форма теоремы Лагранжа о конечном приращении; здесь $a<\xi<b$.

Возвращаясь к формуле

$$F(a+h)=F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a+\theta h),$$

заметим, что в ней a может быть любым числом, лишь бы у функции $F(x)$ существовали производные до $n+1$-го порядка в соседстве с точкой a. Заменяя поэтому a через x, можем формулу Тейлора писать в виде:

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(x+\theta h),$$

или

$$F(x+h)-F(x)=\frac{h}{1}F'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(x+\theta h). \tag{3}$$

Мы имеем здесь приращение функции, расположенное по возрастающим степеням приращения ее аргумента.

Формула Тейлора имеет многочисленные и разнообразные применения. Кроме теории рядов, ради которой мы ее вывели, она оказывает ценные услуги и во многих других вопросах. В частности, в дальнейшем мы увидим ее применение к задаче об отыскании максимума и минимума функции. В настоящий момент, чтобы не удаляться от теории рядов, не будем рассматривать этих приложений формулы Тейлора. Зато мы найдем еще одно выражение для остаточного члена этой формулы, так как для теории рядов одной лагранжевой формы остаточного члена недостаточно.

§ 38. Остаточный член в форме Коши.

Возьмем формулу (3) предыдущего параграфа. Мы видим, что разность

$$F(x+h)-\left[F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)\right]$$

есть какая-то функция от x; обозначая ее через $R_n(x)$, мы хотим найти для нее несколько иное выражение, так как форма, которую ей придал Лагранж, несмотря на всю ее простоту, иногда оказывается неудобной. Итак, полагая

$$R_n(x)=F(x+h)-\left[F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)\right],$$

будем искать другие оценки для $R_n(x)$.

Пусть $x+h=x_0$ и, значит, $h=x_0-x$. Рассматривая x_0 как постоянное, а x как переменное, можно сказать, что $R_n(x)$ есть функция x, определяемая равенством:

$$R_n(x)=F(x_0)-\left[F(x)+\frac{x_0-x}{1}F'(x)+\ldots+\frac{(x_0-x)^n}{n!}F^{(n)}(x)\right].$$

Но эта функция обращается в нуль в точке x_0, в чем можно убедиться, непосредственно подставляя x_0 в предыдущее равенство.

Далее, производная от $R'_n(x)$ выражается так:

$$R'_n(x) = -F'(x) + F'(x) - \frac{x_0 - x}{1} F''(x) + \frac{x_0 - x}{1} F''(x) - \ldots +$$
$$+ \frac{(x_0 - x)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(x) - \frac{(x_0 - x)^n}{n!} F^{(n+1)}(x);$$

это выражение мы получим, если заметим, что каждый член в квадратной скобке есть произведение двух сомножителей и производная от $\frac{(x_0 - x)^k}{k!} F^{(k)}(x)$ есть

$$-\frac{(x_0 - x)^{k-1}}{(k-1)!} F^{(k)}(x) + \frac{(x_0 - x)^k}{k!} F^{(k+1)}(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Заметим теперь, что в формуле, выражающей $R'_n(x)$, все члены, кроме последнего, попарно уничтожаются, вследствие чего

$$R'_n(x) = -\frac{(x_0 - x)^n}{n!} F^{(n+1)}(x).$$

По теореме Лагранжа о конечном приращении можно написать:

$$R_n(x_0) - R_n(x) = (x_0 - x) R'_n(\xi),$$

где ξ есть число, заключенное между x и x_0. Но мы уже видели, что $R_n(x_0) = 0$, поэтому

$$-R_n(x) = (x_0 - x) R'_n(\xi),$$

или

$$R_n(x) = (x_0 - x) \frac{(x_0 - \xi)^n}{n!} F^{(n+1)}(\xi).$$

Заметим, что число ξ можно записать в виде $x + \theta h$, где $0 < \theta < 1$, ибо тогда оно заключено между x и $x + h = x_0$; поэтому $x_0 - \xi = x_0 - x - \theta h = h - \theta h = h(1 - \theta)$. Следовательно,

$$\xi = x + \theta h, \quad x_0 - \xi = h(1 - \theta), \quad x_0 - x = h.$$

Эти соотношения позволяют переписать предыдущую формулу в виде:

$$R_n(x) = h \frac{[h(1 - \theta)]^n}{n!} F^{(n+1)}(x + \theta h),$$

или окончательно

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}(1 - \theta)^n}{n!} F^{(n+1)}(x + \theta h).$$

Это и есть *остаточный член формулы Тейлора в форме Коши*. Напомним, что в форме Лагранжа остаточный член имел вид:

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(x + \theta h).$$

Мы видим, что в форме Лагранжа знаменатель есть $(n+1)!$, а не $n!$; поэтому знаменатель быстрее возрастает при возрастании n, но зато в форме Коши числитель содержит выражение $(1 - \theta)^n$, где $0 < \theta < 1$, т. е. выражение, стремящееся к нулю при n, неограниченно возрастающем. Поэтому при решении вопроса о том, будет ли $R_n(x)$ стремиться к нулю с возрастанием n, ни одна из форм остаточного члена не может быть заранее признана лучшей; мы увидим в дальнейшем, что в зависимости от вида исследуемых функций приходится пользоваться то одной, то другой формулой.

Совершенно аналогично и для формулы Маклорена можно найти остаточный член не только в форме Лагранжа, но и в форме Коши. По формуле Маклорена имеем:

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)+R_n(x),$$

где по Лагранжу, остаточный член выражается в виде:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta x).$$

В форме Коши $R_n(x)$ следует записать так:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}(\theta x).$$

Действительно, если разность

$$F(a+h)-\left[F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a)\right]$$

в форме Коши должна быть записана в виде:

$$\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}(a+\theta h),$$

то, заменяя h через x, найдем для разности

$$F(a+x)-\left[F(a)+\frac{x}{1}F'(a)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(a)\right]$$

выражение

$$\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}(a+\theta x)$$

и, наконец, полагая $a=0$, придем к искомому выражению для остаточного члена ряда Маклорена в форме Коши:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}(\theta x).$$

§ 39. Приложение формулы Тейлора к задаче об отыскании максимума и минимума.

Мы знаем, что точка a называется точкой максимума для функции $f(x)$, если существует такой интервал с центром в точке a, что для каждой точки x этого интервала $f(x)<f(a)$. Другими словами, существует такое число δ, что для всякого h по модулю, меньшего чем δ, мы имеем $f(a+h)<f(a)$ (черт. 18). Точно так же точка a называется точкой минимума для функции $f(x)$, если найдется такое δ, что для всякого h, $|h|<\delta$, имеем: $f(a+h)>f(a)$.

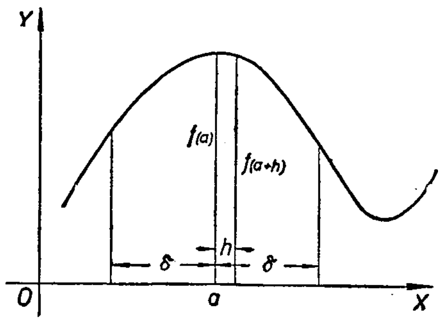
Мы знаем, что если $f'(x)$ существует, то для нахождения тех точек, где $f(x)$ имеет максимум или минимум, надо решить уравнение

$$f'(x)=0$$

и, если a есть один из корней этого уравнения, подставить величину $x=a$ во вторую производную $f''(x)$ данной функции. Если при этом получим $f''(a)<0$, то a есть точка максимума, если $f''(a)>0$, то a есть точка минимума для $f(x)$, и, наконец, если $f''(a)=0$, то вопрос остается нерешенным, так как в этом случае $f(x)$ может в точке a иметь максимум, или минимум, или не иметь ни того, ни другого. Теперь, когда мы познакомились с формулой Тейлора, мы можем снова вернуться к этой задаче и разрешить ее до конца.

Заметим прежде всего, что все сводится к изучению знака разности $f(a+h)-f(a)$ для достаточно малых значений h.

Действительно, a priori ясно, что для заданной функции $f(x)$ в любой точке a может наблюдаться только один из трех случаев:



Черт. 18.

1) при всех достаточно малых значениях h разность $f(a+h)-f(a)$ отрицательна;

2) при всех достаточно малых значениях h разность $f(a+h)-f(a)$ положительна;

3) как бы мало ни было h, разность $f(a+h)-f(a)$ не сохраняет знака, т. е. может иметь и положительные и отрицательные значения.

В первом случае a есть точка максимума. Действительно, если $f(a+h)-f(a)<0$ при всех достаточно малых значениях h, то это значит, что найдется такое δ, при котором для всех $|h|<\delta$ предыдущая разность отрицательна, т. е. $f(a+h)<f(a)$. Но это и есть неравенство, характеризующее точку максимума.

Во втором случае, рассуждая совершенно аналогично, убедимся, что a есть точка минимума.

Наконец, в третьем случае в точке a нет ни максимума, ни минимума, так как если бы было то или другое, то нашлось бы такое δ, при котором для всех $|h|<\delta$ разность $f(a+h)-f(a)$ сохраняла бы знак, чего нет по нашему предположению.

Итак, мы убедились, что вопрос сводится к изучению знака разности $f(a+h)-f(a)$. Если предполагать, что функция $f(x)$ имеет производные до $n+1$-го порядка, то мы можем писать эту разность по формуле Тейлора в виде:

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+$$
$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

где $0<\theta<1$. Воспользуемся этой формулой для решения вопроса о знаке

$$f(a+h)-f(a).$$

Прежде всего примем $n=0$, т. е. напишем формулу Тейлора в виде:

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h}{1}f'(a+\theta h).$$

Если $f'(a) \neq 0$, то при достаточно малом h, $f'(a+\theta h)$ также $\neq 0$ и имеет тот же знак, что и $f'(a)$ [так как $f'(x)$ непрерывна][1]. Поэтому выражение $hf'(a+\theta h)$ имеет тот же знак, что и $hf'(a)$, а так как $f'(a)$ постоянно, то $hf'(a)$ меняет знак, когда h меняет знак, переходя через нуль. Отсюда следует, что разность $f(a+h)-f(a)$ не может сохранять знак, как бы мало ни было h, а потому в точке a не может быть ни максимума, ни минимума. Итак, если $f'(a) \neq 0$, то в точке a нет ни максимума, ни минимума.

Следовательно, **для того чтобы функция $f(x)$ имела максимум или минимум в точке a, необходимо, чтобы $f'(a)=0$.** Иначе говоря, точки максимума или минимума надо искать среди корней уравнения $f'(x)=0$.

Предположим, что $f'(a)=0$, и напишем снова формулу Тейлора, но уже приняв $n=1$. Тогда

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h).$$

Заметив, что $f'(a)=0$, получим:

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h).$$

Если $f''(a) \neq 0$, то и $f''(a+\theta h) \neq 0$ при достаточно малом h, причем знак $f''(a+\theta h)$ совпадает со знаком $f''(a)$ [так как $f''(x)$ непрерывна]. Так как множитель $\frac{h^2}{2!}$ положителен при всех значениях h, то знак разности $f(a+h)-f(a)$ будет тот же, что и знак $f''(a)$. Поэтому, если $f''(a)<0$, то $f(a+h)-f(a)<0$, и, значит, мы имеем точку максимума. Точно так же, если $f''(a)>0$, то $f(a+h)-f(a)>0$ при всех достаточно малых h, т. е. мы имеем точку минимума.

Следовательно, если $f'(a)=0$ и $f''(a)<0$, мы имеем максимум; если $f'(a)=0$ и $f''(a)>0$, имеем минимум.

В случае, если $f'(a)=0$ и $f''(a)=0$, мы напишем формулу Тейлора, взяв уже $n=2$, т. е.

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta h).$$

Рассуждая по-предыдущему, мы видим, что при достаточно малом h, если только $f'''(a) \neq 0$, знак $f'''(a+\theta h)$ совпадает со знаком $f'''(a)$, а так как h^3 меняет знак, когда h проходит через нуль, то и все выражение в правой части, а вместе с ним и разность $f(a+h)-f(a)$ меняет знак; поэтому в точке a нет ни максимума, ни минимума.

Теперь мы можем перейти к рассмотрению вопроса в общем виде. Допустим, что $f'(a)=0$, $f''(a)=0, \ldots, f^{(n-1)}(a)=0$, но $f^{(n)}(a) \neq 0$. В таком случае формула Тейлора даст:

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),$$

так как все члены, предшествующие члену $\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$, обратились в нуль. Так как мы предположили, что $f^{(n)}(a) \neq 0$, то при достаточно малом h выражение $f^{(n)}(a+\theta h)$ имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(a)$ [мы

[1] Если некоторая функция $F(x)$ имеет производную в точке x, то она непрерывна в этой точке.

ведь предполагали, что $f(x)$ имеет производные до $n+1$-го порядка; значит, $f^{(n)}(x)$ непрерывна]. Далее, придется различать два случая: когда n четно и когда оно нечетно. Если n четно, то h^n всегда положительно, а потому знак правой части совпадает со знаком $f^{(n)}(a)$. Отсюда следует, что при достаточно малом h разность $f(a+h)-f(a)$ положительна при $f^{(n)}(a)>0$ и отрицательна при $f^{(n)}(a)<0$. Следовательно, при $f^{(n)}(a)<0$ имеем максимум, а при $f^{(n)}(a)>0$ имеем минимум. Если же n нечетно, то h^n меняет знак вместе с h, а потому и разность $f(a+h)-f(a)$ меняет знак, т. е. в точке a нет ни максимума, ни минимума.

Резюмируя все вышесказанное, мы приходим к следующему заключению:

Для того чтобы найти точки, где функция $f(x)$ имеет максимум или минимум, надо решить уравнение $f'(x)=0$. Пусть a — один из корней этого уравнения. Если в последовательности $f''(a), f'''(a),\ldots, f^{(k)}(a),\ldots$ первое число, отличное от нуля, есть $f^{(n)}(a)$, то, в случае если n нечетно, в точке a нет ни максимума, ни минимума, если же n четно, то при $f^{(n)}(a)<0$ имеем максимум, а при $f^{(n)}(a)>0$ — минимум [1]).

Пример 1. Найти максимум или минимум функции

$$f(x)=(a^2-x^2)^3.$$

Имеем:

$$f'(x)=-6(a^2-x^2)^2x.$$

Корни этого уравнения суть:

$$x=0, \quad x=+a \text{ и } x=-a.$$

Для исследования этих корней вычислим, согласно общему правилу, $f''(x)$

$$f''(x)=-6(a^2-x^2)(a^2-5x^2).$$

Отсюда мы непосредственно видим, что при $x=0$

$$f''(0)=-6a^4<0,$$

а потому точка $x=0$ есть точка максимума. Точки $x=+a$ и $x=-a$ дают для второй производной значения, равные нулю:

$$f''(+a)=f''(-a)=0.$$

Поэтому надо перейти к третьей производной:

$$f'''(x)=-6[-12a^2x+20x^3],$$

откуда

$$f'''(+a)=-48a^3,\ f'''(-a)=+48a^3.$$

В том и другом случаях f''' оказывается отличной от нуля, а потому нет ни максимума, ни минимума.

Пример 2. Найти максимум или минимум для функции

$$f(x)=x^4e^{-x^2}.$$

Имеем:

$$f'(x)=e^{-x^2}(4x^3-2x^5).$$

---

[1]) Указанный способ нахождения максимума или минимума не приложим к функции, не имеющей в рассматриваемой точке производной.

Так как $e^{-x^2} \neq 0$, то уравнение $f'(x) = 0$ сводится к уравнению

$$4x^3 - 2x^5 = 0,$$

корни которого суть:

$$x = 0, \quad x = +\sqrt{2} \quad \text{и} \quad x = -\sqrt{2}.$$

Найдем $f''(x)$:

$$f''(x) = e^{-x^2}(4x^6 - 18x^4 + 12x^2),$$

откуда

$$f''(+\sqrt{2}) = f''(-\sqrt{2}) = -16\,e^{-2} < 0.$$

Следовательно, в точках $x = +\sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ функция имеет максимум. При $x = 0$ мы имеем:

$$f''(0) = 0;$$

поэтому надо исследовать $f'''(x)$. Имеем:

$$f'''(x) = e^{-x^2}(-8x^7 + 60x^5 - 96x^3 + 24x);$$

так как $f'''(0) = 0$, то придется исследовать $f^{(IV)}(x)$. Получим:

$$f^{(IV)}(x) = -2xe^{-x^2}(-8x^7 + 60x^5 - 96x^3 + 24x) + \\ + e^{-x^2}(-56x^6 + 300x^4 - 288x^2 + 24),$$

откуда

$$f^{(IV)}(0) = 24,$$

а потому в точке 0 имеем минимум.

§ 40. Сходимость рядов Тейлора и Маклорена.

Вернемся к рядам и, имея в своем распоряжении формулы Тейлора и Маклорена, будем судить по виду их остаточных членов о сходимости рядов Тейлора и Маклорена. В самом деле, пусть $F(x)$ есть некоторая функция, имеющая производные всех порядков в точке $x = 0$. Вычисляя величины этой функции и ее производных в точке $x = 0$, мы можем формально написать ее ряд Маклорена:

$$F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0) + \ldots.$$

Но, как уже говорилось в § 34, даже если мы убедились в том, что он сходится в некотором интервале, мы еще не имеем права заключить, что его сумма равна $F(x)$. Чтобы узнать, сходится ли ряд Маклорена к функции $F(x)$, будем рассуждать так: из самого определения сходимости функционального ряда следует, что если ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

сходится к некоторой функции $S(x)$ на каком-либо интервале, то для каждой точки x этого интервала

$$\lim_{n \to \infty} \{S(x) - [u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)]\} = 0,$$

т. е. разность между $S(x)$ и суммой n первых членов рассматриваемого ряда должна стремиться к нулю при неограниченном возрастании n.

Итак, если $F(x)$ есть сумма ряда Маклорена

$$F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)+\ldots$$

на некотором интервале, то это значит, что

$$F(x)-\left[F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)\right]$$

должно стремиться к нулю при неограниченном возрастании n. Обратно, если эта разность стремится к нулю при неограниченном возрастании n для некоторых x, то можно сказать, что $F(x)$ есть сумма рассматриваемого ряда Маклорена для этих значений x.

Но рассматриваемую разность мы назвали остаточным членом формулы Маклорена и обозначили символом $R_n(x)$. Следовательно, вопрос о том, сходится ли ряд Маклорена к функции $F(x)$ для данного значения x, эквивалентен вопросу о том, стремится ли $R_n(x)$ к нулю при неограниченном возрастании n. Для $R_n(x)$ мы имеем две удобные оценки: форму Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta x),$$

и форму Коши

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}(\theta x).$$

Эти выражения позволяют в большинстве случаев решить вопрос о сходимости ряда к данной функции, как мы увидим в дальнейшем на многочисленных примерах. Заметим, например, что если у рассматриваемой функции производные всех порядков для любого значения x в некотором интервале остаются по абсолютной величине меньше некоторого постоянного положительного числа M, то ряд сходится к $F(x)$ для всех значений x на этом интервале. Действительно, тогда из формы Лагранжа имеем:

$$|R_n(x)|<\frac{M\,|x^{n+1}|}{(n+1)!}.$$

Но $\frac{M\,|x^{n+1}|}{(n+1)!}$ стремится к нулю при $n\longrightarrow\infty$ для всех значений x, так как $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ есть член абсолютно сходящегося для всех значений x ряда (§ 28).

Это простое замечание позволит, например, заново доказать, что ряд

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

сходится к $\sin x$, в чем мы уже убедились в § 36. Действительно, рассматриваемый ряд есть, как мы видели, ряд Маклорена для функции $\sin x$, а так как производная любого порядка от $\sin x$ есть либо $\cos x$, либо $-\sin x$, либо $-\cos x$, либо $\sin x$, то все эти производные ограничены (не больше 1) для любого значения x, а значит, на основании предыдущего замечания, для этого ряда $|R_n(x)|<\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$, т. е. $R_n(x)$ стремится к нулю для всех значений x.

Совершенно так же доказывается, что ряд

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

сходится к функции $\cos x$.

Прежде чем переходить к другим, уже новым, примерам разложения функций в ряд Маклорена, заметим, что все сказанное для ряда Маклорена может быть дословно повторено для ряда Тейлора. Следовательно, для того чтобы ряд

$$F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+\ldots$$

сходился к $F(x)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член его, т. е.

$$R_n(x)=F(x)-\left[F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)\right],$$

стремился к нулю. Но этот остаточный член можно выразить в форме Лагранжа,

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}[a+\theta(x-a)],$$

или в форме Коши,

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}[a+\theta(x-a)].$$

Эти выражения дают возможность судить о стремлении к нулю остаточного члена в целом ряде важных случаев.

§ 41. Разложение в ряд $\ln(1+x)$.

Мы уже отметили в § 34, что разложить $\ln x$ в ряд Маклорена нельзя, так как функция и ее производные не будут конечными в точке $x=0$; но функцию $\ln(1+x)$ можно разложить в ряд Маклорена. Действительно, полагая

$$F(x)=\ln(1+x),$$

найдем:

$$F'(x)=\frac{1}{1+x}, \qquad F^{IV}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$F''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \qquad F^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Поэтому

$$F(0)=0,\ F'(0)=1,\ F''(0)=-1,\ F'''(0)=2!,\ F^{IV}(0)=$$
$$=-3!,\ \ldots,\ F^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

Следовательно, ряд Маклорена для этой функции имеет вид:

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots.$$

Прежде всего заметим, что интервал сходимости этого ряда есть $(-1, +1)$, в чем можно убедиться, хотя бы заметив, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ (см. об интервале сходимости § 29). Отсюда следует, что для $|x|>1$ вообще не может быть речи о сходимости ряда; если $|x|<1$, ряд заведомо сходится, но надо еще показать, что именно к $\ln(1+x)$; наконец, надо исследовать, что происходит в концах интервала сходимости, т. е. при $x=+1$ и при $x=-1$.

Если $x=-1$, наш ряд превращается в ряд

$$-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots,$$

который расходится, так как образуется из гармонического умножением всех членов его на -1. Поэтому случай $x=-1$ мы можем исключить из наших рассмотрений.

Теперь изучим значения $x, -1<x\leqslant 1$, и посмотрим, сходится ли для них наш ряд к $\ln(1+x)$. С этой целью напишем его остаточный член как в форме Лагранжа,

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}=$$
$$=\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1},$$

так и в форме Коши,

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}(\theta x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n(-1)^n n!}{n!(1+\theta x)^{n+1}}=$$
$$=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Для значений x, таких, что $0\leqslant x\leqslant 1$, мы имеем $0\leqslant\frac{x}{1+\theta x}\leqslant 1$, а потому из формы Лагранжа найдем:

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1},$$

и, следовательно, $R_n(x)$ стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Для значений x, заключенных между -1 и 0, форма Лагранжа не позволяет судить о стремлении $R_n(x)$ к нулю, так как выражение $1+\theta x$ может быть как угодно малым при x, близком к -1. Но зато форма Коши дает ответ на вопрос. Раз $-1<x\leqslant 0$, то можно найти такое положительное число r, что $0>x>-r>-1$; тогда

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{r^{n+1}}{1-\theta r},$$

так как

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1 \text{ и } 1+\theta x>1-\theta r.$$

Мы снова видим, что $R_n(x)$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n, так как из $0>-r>-1$ следует $0<r<1$, а потому r^{n+1} стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Таким образом, мы убедились, что рассматриваемый ряд действительно сходится к $\ln(1+x)$, если только $-1<x\leqslant 1$, и мы можем писать:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots.$$

В частности, при $x=+1$ мы получаем весьма замечательное равенство:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

С рядом, стоящим в правой части этого равенства, мы уже встречались в § 14; мы видели, что он сходится, но не абсолютно; теперь мы знаем, что его сумма есть $\ln 2$.

§ 42. Составление таблиц логарифмов.

Формула

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

выведенная в предыдущем параграфе, справедлива лишь для значений x, удовлетворяющих неравенству $-1<x\leqslant 1$; тем не менее мы сумеем воспользоваться ею для вычисления логарифмов всех целых чисел. С этой целью прежде всего заметим, что, заменяя в предыдущем равенстве x на $-x$, мы получим новую формулу:

$$\ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots,$$

которая будет справедлива при $-1<-x\leqslant 1$, т. е., иначе говоря, при $-1\leqslant x<1$. Так как разность двух сходящихся рядов есть опять сходящийся ряд, причем его сумма есть разность между суммами двух заданных рядов, то имеем:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left[\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right],$$

причем это равенство будет справедливо для значений x в интервале $-1<x<+1$, но уже не годится ни при $x=-1$, ни при $x=+1$.

Пусть n есть какое-нибудь целое положительное число; мы всегда можем определить x из равенства

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}.$$

Действительно, тогда $x=\frac{1}{2n+1}$ и, следовательно, $0<x<1$. Поэтому для найденного значения x только что написанная формула для $\ln\frac{1+x}{1-x}$ верна, и мы можем написать:

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\right],$$

откуда следует, что

$$\ln(n+1)-\ln n=\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{3(2n+1)^3}+\frac{2}{5(2n+1)^5}+\ldots.$$

Таким образом, зная натуральный логарифм некоторого целого числа n, мы можем по этой формуле найти $\ln(n+1)$.

Эта формула очень удобна для вычислений. Действительно, если в ней остановиться на члене

$$\frac{2}{2p-1}\frac{1}{(2n+1)^{2p-1}},$$

то остаток будет положительным числом, меньшим, чем

$$\frac{2}{2p+1}\left[\frac{1}{(2n+1)^{2p+1}}+\frac{1}{(2n+1)^{2p+3}}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{2}{2p+1}\frac{\frac{1}{(2n+1)^{2p+1}}}{1-\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2}=\frac{1}{(2p+1)(2n+1)^{2p-1}2n(n+1)}.$$

Например, если мы хотим этим способом вычислить $\ln 2$, нам достаточно положить $n=1$ в равенстве, выражающем $\ln(n+1)$ через $\ln n$, и мы найдем:

$$\ln 2=2\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\ldots,$$

причем ошибка, которую мы совершим, если остановимся на члене $\frac{2}{2p-1}\frac{1}{3^{2p-1}}$, будет меньше, чем $\frac{1}{2(2p+1)3^{2p-1}}$. Если мы хотим вычислить $\ln 2$ с семью десятичными знаками, то надо в предыдущем ряде дойти до восьмого члена $\frac{2}{15\cdot 3^{15}}$; при этом, согласно предыдущему, мы совершим ошибку меньшую, чем $\frac{1}{2\cdot 17\cdot 3^{15}}<\frac{1}{4}\frac{1}{10^8}$. Если мы каждый из взятых восьми членов ряда превратим в десятичную дробь и вычислим до десятого десятичного знака, то ошибка при вычислении каждого из членов $<\frac{1}{10^{10}}$; значит, при вычислении их суммы она $<\frac{8}{10^{10}}$; прибавив к этому $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10^8}$, мы видим, что вся ошибка будет $<\frac{1}{10^8}$, т. е. не окажет влияния на седьмой десятичный знак. Таким образом мы получаем:

$$\ln 2=0{,}6931471,$$

причем эти семь знаков верны.

Важно заметить, что с возрастанием n величина $\frac{1}{2n+1}$ убывает; поэтому ошибка при вычислении становится все меньше и меньше. Таким образом, выкладки, весьма утомительные вначале, становятся впоследствии все легче и легче, так как оказывается возможным пренебрегать уже третьим и, наконец, даже вторым членом ряда.

Заметим, наконец, что здесь шла речь о вычислении *натуральных* логарифмов целых чисел, для практики же удобно иметь логарифмы при основании 10. Переход от одних логарифмов к другим очень легок. Действительно, если y есть десятичный логарифм x, т. е. логарифм x при основании 10, то это значит, что $10^y=x$. Взяв натуральные логарифмы от обеих частей этого равенства, получим: $y \ln 10 = \ln x$, или, обозначая десятичный логарифм x через $\lg x$, имеем: $\lg x \cdot \ln 10 = \ln x$, откуда

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Число $M = \frac{1}{\ln 10}$ иногда называют модулем десятичной системы логарифмов; мы имеем:

$$M = 0{,}43429\ldots.$$

Можно, следовательно, сказать, что для получения десятичного логарифма некоторого числа достаточно найти его натуральный логарифм и умножить его на модуль M:

$$\lg x = M \ln x.$$

Обратно, если бы мы хотели перейти от десятичных логарифмов к натуральным, то достаточно было бы написать:

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x,$$

причем

$$\frac{1}{M} = 2{,}30258\ldots.$$

Таким образом мы видим, что теория рядов позволяет составить таблицы логарифмов. Покажем, что она дает возможность объяснить, как в этих таблицах производить интерполяцию.

Мы знаем, что если надо вычислить десятичный логарифм какого-нибудь числа, например $A + \alpha$, у которого целая часть A содержится между 1000 и 10 000, то поступают так: находят в обычных пятизначных таблицах логарифмов целых чисел от 1 до 10 000 десятичный логарифм числа A и соседнего с ним числа $A + 1$, затем берут разность $\lg(A+1) - \lg A$ и, наконец, уславливаются считать, что

$$\lg(A+\alpha) = \lg A + \alpha[\lg(A+1) - \lg A]. \qquad (1)$$

Посмотрим, как можно объяснить такое правило. Мы видели, что $\lg x = M \ln x$; поэтому

$$\lg(A+\alpha) = M \ln(A+\alpha),$$

и аналогично

$$\lg A = M \ln A, \ \lg(A+1) = M \ln(A+1).$$

Следовательно, от равенства (1) можно перейти к равенству

$$\ln(A+\alpha) = \ln A + \alpha[\ln(A+1) - \ln A].$$

Установим, какую ошибку мы делаем, когда принимаем число, стоящее в левой части, равным числу, стоящему в правой части равенства (1). Мы имеем:

$$\ln(A+\alpha) - \ln A - \alpha[\ln(A+1) - \ln A] =$$
$$= \ln\left(1 + \frac{\alpha}{A}\right) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{A}\right) = \left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\alpha^2}{2A^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^3}{3A^3} - \ldots\right) - \alpha\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{2A^2} + \frac{1}{3A^3} - \ldots\right) =$$
$$= \frac{\alpha(1-\alpha)}{2A^2} - \frac{\alpha(1-\alpha^2)}{3A^3} + \frac{\alpha(1-\alpha^3)}{4A^4} - \ldots.$$

Ряд, стоящий в правой части этого равенства, есть знакочередующийся, с монотонно убывающими членами, так как $0 < \alpha < 1$ и число A велико; поэтому (§ 14) его сумма меньше, чем $\frac{\alpha(1-\alpha)}{2A^2}$, а так как $0 < \alpha < 1$, то произведение $\alpha(1-\alpha) = \frac{1}{4} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2$ не больше $\frac{1}{4}$, а потому сумма ряда $\leqslant \frac{1}{8A^2} < \frac{10^{-6}}{8}$, так как мы предположили A между 1000 и 10 000.

Таким образом, приняв левую часть последнего равенства равной нулю, мы совершаем ошибку $< \frac{10^{-6}}{8}$, а потому можно считать вполне оправданным то правило, которое учит нас принимать

$$\lg(A+\alpha) = \lg A + \alpha[\lg(A+1) - \lg A].$$

Аналогично можно было бы оправдать то правило интерполяции, при помощи которого по данному логарифму отыскивается число, если этого числа нет в таблицах логарифмов (как это обычно и бывает).

§ 43. Биномиальный ряд.

Рассмотрим разложение в ряд Маклорена для функции

$$F(x) = (1+x)^m,$$

где m — какое угодно постоянное число. Если бы m было положительным целым числом, то мы имели бы по формуле бинома Ньютона:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n + \ldots + x^m.$$

Покажем, что если m есть целое отрицательное или дробное число, разложение $(1+x)^m$ представляется уже не в виде конечной суммы, а в виде ряда, коэфициенты которого будут иметь такой же вид, как в формуле бинома Ньютона. Действительно, полагая

$$F(x) = (1+x)^m,$$

мы найдем:

$$F'(x) = m(1+x)^{m-1},$$
$$F''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(n)}(x) = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

отсюда

$$F'(0) = m,$$
$$F''(0) = m(m-1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(n)}(0) = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1).$$

Поэтому ряд Маклорена для функции $(1+x)^m$ имеет вид:

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n + \ldots$$

Этот ряд, естественно обрывающийся на члене x^m, когда m — число целое, так как все следующие коэфициенты тогда равны нулю, для m дробного или целого, но отрицательного, уже является бесконечным рядом. Исследуем вопрос о его сходимости и о том, является ли $(1+x)^m$ его суммой для тех значений x, для которых он сходится. Прежде всего ясно, что интервал сходимости этого ряда есть $(-1, +1)$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+1)}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|1-\frac{m+1}{n+1}\right|=1.$$

Значит, ряд заведомо расходится при $|x|>1$ и сходится при $|x|<1$; насчет точек $x=+1$ и $x=-1$ надо произвести отдельное исследование.

Рассмотрим остаточный член этого ряда в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+1)}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}.$$

Если $0\leqslant x<1$, то $1+\theta x\geqslant 1$, а потому при $n+1>m$ имеем:

$$(1+\theta x)^{m-n-1}=\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-m}}\leqslant 1.$$

Следовательно, при $n>m-1$ и $0\leqslant x<1$

$$|R_n(x)|<\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+1)}x^{n+1},$$

т. е. $|R_n(x)|$ меньше $n+1$-го члена ряда, сходимость которого при $-1<x<+1$ мы только что доказали, а потому $R_n(x)$ стремится к нулю при $0\leqslant x<1$ и при неограниченном возрастании n.

Подобно этому, представляя $R_n(x)$ в форме Коши

$$R_n(x)=\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}(1-\theta)^n=$$

$$=\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n,$$

замечаем, что если $-1<x\leqslant 0$, то

$$|R_n(x)|<\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}|x^{n+1}|.$$

Но и это выражение стремится к нулю при $n\to\infty$ и при $-1<x\leqslant 0$, так как его можно рассматривать как $n+1$-й член некоторого ряда, который сходится, ибо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\,|x|^{n+1}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\,|x|^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{m-n}{n}\right|=|x|<1.$$

Таким образом, мы видим, что рассматриваемый биномиальный ряд

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots$$

не только сходится при $-1<x<1$, но и имеет суммой функцию $(1+x)^m$, т. е.

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+ \\ +\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots$$

при $-1<x<1$.

Что касается точек $x=+1$ и $x=-1$, то для них мы не станем проводить исследование сходимости ряда, так как оно довольно сложно (приходится различать случай $m>0$, случай $-1<m\leqslant 0$ и случай $m\leqslant -1$), и ограничимся указанием на то, что при положительном m биномиальный ряд остается сходящимся и для $x=+1$ и для $x=-1$, при $-1<m\leqslant 0$ он сходится для $x=+1$, но расходится для $x=-1$, и, наконец, при $m\leqslant -1$ ряд расходится как при $x=+1$, так и при $x=-1$.

Теперь применим полученные результаты к разложению в ряд других функций, прямо или косвенно получая эти ряды из биномиального ряда.

§ 44. Разложение в ряд arc sin x.

Если мы в формуле бинома положим $m=-\frac{1}{2}$ и заменим x через $-x^2$, то получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}x^{2n}+\ldots,$$

причем эта формула, по доказанному, справедлива при $x^2<1$, т. е. при $-1<x<1$. В § 33 было доказано, что степенные ряды можно почленно интегрировать в интервале их сходимости. Интегрируя наш ряд, получим:

$$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots+ \\ +\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots.$$

Эта формула будет справедлива снова для $-1<x<+1$ (можно было бы доказать, что и для $x=\pm 1$).

В частности, если предполагать формулу доказанной и для $x=+1$, то, замечая, что $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, получим:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots+ \\ +\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\frac{1}{(2n+1)}+\ldots.$$

Эта формула дает возможность приближенно вычислить число π. Так как ряд сходится тем быстрее, чем x меньше, то более удобной для вычисления могла бы быть, например, формула, получаемая из разложения $\arcsin x$ при $x=\frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}+\ldots.$$

§ 45. Вычисление эллиптических интегралов при помощи рядов.

Из интегрального исчисления известно, что для вычисления длины дуги кривой, заданной в параметрической форме

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

употребляется формула

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt,$$

где t_1 и t_2 — некоторые значения параметра t, а x' и y' находятся из уравнения кривой. В частности, если бы мы захотели вычислить по этой формуле длину дуги эллипса, уравнение которого можно записать в виде:

$$x = a\sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi,$$

то, принимая за начало отсчета дуг точку B, т. е. верхний конец малой оси, имели бы для длины дуги BM (черт. 19):

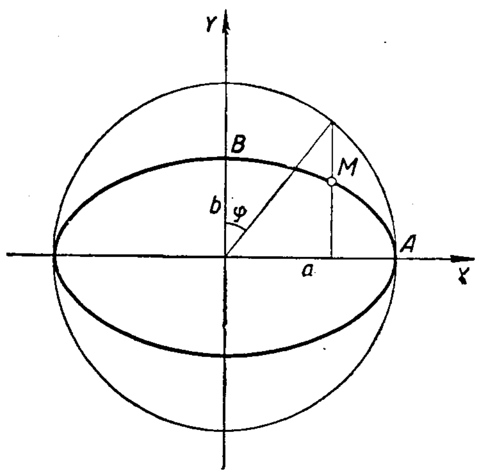
$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Если положить $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, то $k^2 < 1$ и

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

или

$$s = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$



Черт. 19.

Последний интеграл носит название *эллиптического интеграла* и, несмотря на свою внешнюю простоту, не может быть выражен через элементарные функции в конечном виде.

Другими словами, этот интеграл, как принято говорить, „не берется“, т. е. его нельзя вычислить ни одним из тех способов, которыми пользуется обычно интегральное исчисление (как, например, интегрирование через подстановку, по частям и другие аналогичные приемы). Если мы хотим уметь вычислять, хотя бы приближенно, длины дуг эллипса, мы вынуждены обратиться к теории рядов.

Для этого заметим, что выражение $\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$, где $k^2 < 1$, может быть разложено в биномиальный ряд, если положить $m = \frac{1}{2}$ и

$x = -k^2 \sin^2 \varphi$. Мы найдем:

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi - \ldots .$$

Легко видеть, что этот ряд сходится при всех значениях φ и допускает почленное интегрирование. Действительно, $\sin\varphi$ не превосходит 1 по абсолютной величине, поэтому члены нашего ряда по абсолютной величине меньше членов ряда

$$1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}k^6 + \ldots ,$$

а этот последний ряд сходится, так как его члены меньше членов прогрессии

$$1 + k^2 + k^4 + k^6 + \ldots ,$$

знаменатель которой $k^2 < 1$. Итак, наш ряд есть *мажорируемый* (§ 23), а потому его можно интегрировать почленно (§ 25); и мы найдем:

$$s = a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\left(\varphi - \frac{1}{2}k^2\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi\,d\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}k^4\int_0^{\varphi}\sin^4\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}k^6\int_0^{\varphi}\sin^6\varphi\,d\varphi - \ldots\right).$$

Каждый из этих интегралов вычисляется совершенно элементарно. Ограничимся вычислением для случая, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. вычислим длину дуги BA. Обозначив через σ периметр эллипса, имеем:

$$\sigma = 4BA = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Следовательно, длину дуги эллипса можно вычислить, пользуясь ранее выведенным рядом:

$$\sigma = 4a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}k^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi\,d\varphi - \ldots\right).$$

Вычислим $J_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\varphi\sin\varphi\,d\varphi.$$

Интегрируя по частям, найдем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = -\sin^{2n-1}\varphi\cos\varphi\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\,(1-\sin^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\, d\varphi - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi.$$

Так как мы обозначили $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi$ через J_{2n}, то $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\, d\varphi$ должен быть обозначен через J_{2n-2}, и предыдущую формулу можно переписать так:

$$J_{2n} = (2n-1)\,J_{2n-2} - (2n-1)J_{2n},$$

откуда

$$2nJ_{2n} = (2n-1)\,J_{2n-2},$$

или

$$J_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\,J_{2n-2}.$$

Так как это соотношение справедливо при всяком n, то

$$J_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2}\,J_{2n-4},$$

$$J_{2n-4} = \frac{2n-5}{2n-4}\,J_{2n-6},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J_4 = \frac{3}{4}\,J_2.$$

Но

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Перемножив почленно все предыдущие равенства, найдем:

$$J_{2n}\cdot J_{2n-2}\cdot J_{2n-4}\cdot\ \ldots\ \cdot J_4 = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{3}{4}\,J_{2n-2}\cdot J_{2n-4}\cdot\ \ldots\ \cdot J_2,$$

откуда, сократив на $J_4\cdot J_6\cdot\ldots\cdot J_{2n-2}$, получим:

$$J_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-2)\,2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Подставив этот результат в ранее полученную формулу для выражения периметра эллипса, найдем:

$$\sigma = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots \right].$$

Этот ряд сходится тем быстрее, чем k меньше, а так как $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, то он сходится тем быстрее, чем меньше различаются между собой оси эллипса. В частности, когда эллипс превращается в окружность, мы имеем $a = b$, $k = 0$, все члены ряда, кроме первого, обращаются в нуль, и $\sigma = 2\pi a$, как и следовало ожидать для окружности радиуса a.

§ 46. Другие примеры вычисления интегралов при помощи рядов.

Метод, которым мы в предыдущем параграфе вычисляли эллиптический интеграл, является общим приемом, позволяющим вычислять интегралы, которые „нельзя взять", т. е. интегралы, не выражаемые в элементарных функциях. Такого рода интегралы приходится встречать довольно часто. К числу их относятся, например, так называемый гауссов интеграл

$$\int e^{-x^2}\, dx,$$

постоянно встречающийся в теории вероятностей и математической статистике, интегральный синус

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

интегральный логарифм

$$\int \frac{dx}{\ln x}$$

и другие. Покажем, как вычислять такие интегралы при помощи теории рядов.

Возьмем функцию e^{-x^2}. Мы знаем, что e^x разлагается в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

сходящийся абсолютно для всех значений x. Заменив в этой формуле x через $-x^2$, найдем:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots.$$

Этот ряд также будет сходиться абсолютно для всех значений x. Если мы хотим вычислить, например,

$$\int_0^a e^{-x^2}\, dx,$$

где a — какое угодно положительное число, нам достаточно заметить, что мы имеем право интегрировать предыдущий ряд почленно в пределах от 0 до a, так как степенные ряды допускают почленное интегрирование во всяком интервале, лежащем внутри интервала сходимости (§ 33). Поэтому

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \ldots\right)\Big|_0^a = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1!3} + \frac{a^5}{2!5} - \frac{a^7}{3!7} + \ldots,$$

и, следовательно, мы можем вычислить с любой наперед заданной степенью точности величину рассматриваемого интеграла.

Подобно этому можно вычислить интегральный синус. Мы имеем:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

Этот ряд тоже сходится для всех значений x. Предполагая $x \neq 0$ и деля все члены этого ряда на x, найдем:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots.$$

Полученный ряд снова сходится для всех значений x. А так как всякий степенной ряд допускает почленное интегрирование внутри интервала сходимости, то

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \ldots.$$

Этот ряд, сходящийся для всех значений x, позволяет как угодно точно вычислить $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$ при любом x.

Обращаемся, наконец, к интегралу $\int \frac{dx}{\ln x}$.

Будем его вычислять, сделав предварительно замену переменного $x = e^t$; это дает:

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{e^t dt}{t} = \int \frac{1 + e^t - 1}{t}\,dt = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{e^t - 1}{t}\,dt,$$

откуда

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln t + \int \frac{e^t - 1}{t}\,dt.$$

Но мы знаем, что

$$e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots;$$

поэтому, вычитая по 1 из обеих частей равенства и деля затем все члены его на t, найдем:

$$\frac{e^t - 1}{t} = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{n!} + \ldots.$$

Этот ряд абсолютно сходится для всех значений t, а потому его можно интегрировать почленно в любом интервале, и мы найдем:

$$\int \frac{e^t - 1}{t}\,dt = \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!2} + \frac{t^3}{3!3} + \ldots + \frac{t^n}{n!n} + \ldots.$$

Следовательно, для $x=e^t$

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln t + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!2} + \frac{t^3}{3!3} + \ldots + \frac{t^n}{n!n} + \ldots,$$

а так как $x=e^t$, или $t=\ln x$, то

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln \ln x + \frac{\ln x}{1} + \frac{(\ln x)^2}{2!2} + \frac{(\ln x)^3}{3!3} + \ldots + \frac{(\ln x)^n}{n!n} + \ldots.$$

Эта формула будет справедлива при любом положительном x, так как для всякого такого x можно найти $t=\ln x$; для $x=0$ или $x<0$ она, разумеется, утрачивает смысл.

§ 47. Теорема Вейерштрасса.

В предыдущих параграфах мы видели, как можно вычислить интеграл от некоторой функции в том случае, когда ее удается разложить в степенной ряд. Но из курса интегрального исчисления известно, что для всякой непрерывной функции существует примитивная, т. е. для всякой непрерывной $f(x)$ существует $F(x)$ такая, что $F'(x)=f(x)$, и, значит,

$$F(x)=\int f(x)\,dx.$$

Как же вычислить этот интеграл, если этого нельзя достигнуть обычными приемами интегрирования и если $f(x)$ не разлагается в степенной ряд? Мы знаем, что для разложимости $f(x)$ в степенной ряд необходимо, чтобы она в некоторой точке имела производные всех порядков. Если же функция $f(x)$ не имеет производной ни в какой точке (см. пример § 27), а значит, и подавно не имеет производных высших порядков, то для нее нельзя даже написать ряд Тейлора. Однако теория рядов дает нам возможность и в этом случае найти ее примитивную: надо только разложить функцию не в степенной ряд, а в ряд многочленов, пользуясь для этого одной замечательной теоремой, принадлежащей Вейерштрассу.

A) Теорема Вейерштрасса. **Если $f(x)$ непрерывна на отрезке (a, b) то существует ряд из многочленов**

$$P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x)+\ldots,$$

сходящийся равномерно на этом отрезке и имеющий $f(x)$ своей суммой.

Заметим прежде всего, что для доказательства этой теоремы достаточно доказать следующее предложение:

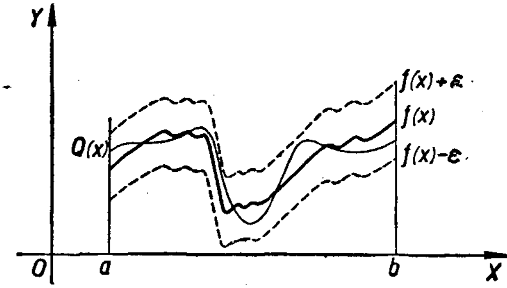
B) **Если $f(x)$ непрерывна на (a, b), то, каково бы ни было положительное число ε, можно найти такой многочлен $Q(x)$, что**

$$|f(x)-Q(x)|<\varepsilon, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Иначе говоря, **всякую непрерывную функцию можно с любой наперед заданной степенью точности приближенно представить в виде многочлена.**

Геометрический смысл этого предложения таков: если кривую $y=f(x)$

поднять вверх на ε и опустить вниз на ε, то получим две кривые: $y=f(x)+\varepsilon$ и $y=f(x)-\varepsilon$, между которыми образуется полоса шириною 2ε. Как бы узка эта полоса ни была, можно найти многочлен $Q(x)$ такой, что кривая $y=Q(x)$ не выходит из рассматриваемой полосы для всех x на (a, b) (черт. 20).



Черт. 20.

Покажем, что если предложение B) о многочлене верно, то верна и теорема Вейерштрасса. Действительно, пусть $\varepsilon=\frac{1}{n}$; на основании предложения B) можно найти такой многочлен $Q_n(x)$, что

$$|f(x)-Q_n(x)|<\frac{1}{n}, \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Для всякого целого n можно найти, таким образом, многочлен $Q_n(x)$, удовлетворяющий предыдущему неравенству. Положим

$$P_1(x)=Q_1(x),$$

$$P_n(x)=Q_n(x)-Q_{n-1}(x), \qquad n=2,3,\ldots.$$

Ясно, что $P_n(x)$ есть многочлен для $n=1,2,3,\ldots$.

Рассмотрим ряд

$$P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x)+\ldots$$

и докажем, что он сходится равномерно к $f(x)$ на (a, b), откуда и будет следовать справедливость теоремы Вейерштрасса. Действительно, взяв сумму n первых членов этого ряда, найдем:

$$P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x)=Q_1(x)+[Q_2(x)-Q_1(x)]+\ldots+ +[Q_n(x)-Q_{n-1}(x)]=Q_n(x).$$

Каково бы ни было ε, можно найти такое N, что $\frac{1}{n}<\varepsilon$ для $n>N$. Выбрав так N мы замечаем, что

$$|f(x)-[P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x)]|=|f(x)-Q_n(x)|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

для всякого $n>N$ и для $a\leqslant x\leqslant b$, а это и значит, что ряд, который мы рассматривали, сходится равномерно к $f(x)$ на (a, b).

Обратно, из теоремы Вейерштрасса вытекает возможность с любой степенью точности приблизить $f(x)$ при помощи многочлена, т. е. вытекает предложение В). Действительно, если

$$f(x)=P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x)+\ldots,$$

где ряд сходится равномерно на (a, b), то найдется для всякого ε такое n, что

$$|f(x)-[P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x)]|<\varepsilon, \qquad a\leqslant x\leqslant b;$$

но тогда, полагая

$$Q_n(x)=P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x),$$

мы видим, что $Q_n(x)$ есть многочлен и

$$|f(x)-Q_n(x)|<\varepsilon, \qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы убедились в эквивалентности предложений A) и B), т. е. теоремы Вейерштрасса и теоремы о возможности приблизить $f(x)$ многочленом с любой наперед заданной степенью точности на всем отрезке (a, b). Перейдем теперь к доказательству предложения В).

Заметим, прежде всего, что если $f(x)$ непрерывна на отрезке (a, b), то она на нем равномерно непрерывна[1]), т. е. каково бы ни было ε, можно найти такое δ, что

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$$

для $|h|<\delta$ и для всякой точки x на (a, b), если только $x+h$ тоже лежит на (a, b). Напомним, кроме того, что всякая функция, непрерывная на некотором отрезке, является на нем ограниченной. Следовательно, для нашей функции $f(x)$ можно найти такое M, что

$$|f(x)|<M, \qquad a\leqslant x\leqslant b. \tag{2}$$

Пусть ε положительное число, как угодно малое. На основании равномерной непрерывности $f(x)$ на (a, b) можно найти такое число δ, что

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

для $|h|<\delta, a\leqslant x\leqslant b$ и $a\leqslant x+h\leqslant b$. Покажем, что можно выбрать целое число n столь большим, чтобы для вышеуказанных M и δ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|\frac{1}{\delta^n}<\frac{\varepsilon}{2M}, \qquad a\leqslant x\leqslant b. \tag{4}$$

Действительно, положительное число ρ можно выбрать так, чтобы

$$|x|<\rho, \qquad a\leqslant x\leqslant b. \tag{5}$$

Ряд

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

как известно, сходится для всякого x; значит, для любого x его n-й член стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$. Полагая $x=\frac{\rho}{\delta}$, мы, следовательно, можем утверждать, что для всякого η можно найти столь большое n, что

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^n<\eta,$$

---

[1]) Это свойство непрерывных функций предполагается известным из курса Анализа.

а значит, для $\eta=\frac{\varepsilon}{2M}$, выбрав n так, чтобы (6) удовлетворялось, мы найдем на основании (5):

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|\frac{1}{\delta^n}<\frac{1}{n!}\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^n<\frac{\varepsilon}{2M}, \qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

т. е. неравенство (4) доказано.

Мы предполагали $f(x)$ заданной и непрерывной лишь на отрезке (a, b). Для дальнейшего, однако, нам было бы удобнее, если бы она была задана и непрерывна на несколько большем отрезке $(a-\delta,\ b+\delta)$. Условимся полагать $f(x)=f(a)$ для $a-\delta\leqslant x\leqslant a$ и $f(x)=f(b)$ для $b\leqslant x\leqslant b+\delta$. В этих условиях $f(x)$ определена и непрерывна на $(a-\delta, b+\delta)$, причем и на этом расширенном отрезке имеем:

$$|f(x)|<M. \tag{2'}$$

Пусть теперь

$$\left.\begin{aligned} f_1(x)&=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta} f(x+t)\,dt,\\ f_2(x)&=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta} f_1(x+t)\,dt,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_n(x)&=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta} f_{n-1}(x+t)\,dt, \end{aligned}\right\} \qquad a\leqslant x\leqslant b \tag{7}$$

или, короче

$$f_n(x)=\frac{1}{(2\delta)^n}\underbrace{\int_{-\delta}^{+\delta}\int_{-\delta}^{+\delta}\ldots\int_{-\delta}^{+\delta}}_{n\ \text{раз}} f(x+t)\,dt\,dt\ldots dt; \tag{8}$$

здесь число n есть то самое, которое мы только что выбрали, чтобы удовлетворить неравенству (4). Обозначая $f_n(x)$ через $\varphi(x)$, докажем, что

$$|\varphi(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad a\leqslant x\leqslant b. \tag{9}$$

Действительно, мы можем записать $f(x)$ в виде:

$$f(x)=\frac{1}{(2\delta)^n}\underbrace{\int_{-\delta}^{+\delta}\int_{-\delta}^{+\delta}\ldots\int_{-\delta}^{+\delta}}_{n\ \text{раз}} f(x)\,dt\,dt\ldots dt,$$

так как при интегрировании по t величина $f(x)$ есть постоянная, а потому может быть вынесена за знаки интегралов. Поэтому

$$\varphi(x)-f(x)=f_n(x)-f(x)=\frac{1}{(2\delta)^n}\underbrace{\int_{-\delta}^{+\delta}\ldots\int_{-\delta}^{+\delta}}_{n\ \text{раз}}[f(x+t)-f(x)]\,dt\ldots dt.$$

Но на основании неравенства (3)

$$|\varphi(x)-f(x)|<\frac{1}{(2\delta)^n}\underbrace{\int\limits_{-\delta}^{+\delta}\ldots\int\limits_{-\delta}^{+\delta}}_{n\text{ раз}}\frac{\varepsilon}{2}\,dt\ldots dt=\frac{\varepsilon}{2},$$

и, таким образом, неравенство (9) доказано.

Докажем теперь, что $\varphi(x)$ имеет производные до n-го порядка включительно на (a, b), а также постараемся оценить величину ее n-й производной. Для этого заметим, прежде всего, что если в первом из равенств (7) сделать замену переменного, полагая $x+t=z$, то

$$f_1(x)=\frac{1}{2\delta}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta}f(z)\,dz;$$

поэтому, если $F(z)$ есть какая-нибудь примитивная для $f(z)$, т. е. $F'(z)=f(z)$ для $a-\delta\leqslant z\leqslant b+\delta$, то

$$f_1(x)=\frac{1}{2\delta}[F(x+\delta)-F(x-\delta)],\qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

а значит,

$$f_1'(x)=\frac{1}{2\delta}[f(x+\delta)-f(x-\delta)];$$

поэтому

$$|f_1'(x)|<\frac{M}{\delta},\qquad a\leqslant x\leqslant b$$

на основании неравенства (2′).

Но так как $f_2(x)$ получается из $f_1(x)$ так же, как $f_1(x)$ из $f(x)$, то

$$f_2'(x)=\frac{1}{2\delta}[f_1(x+\delta)-f_1(x-\delta)],$$

а потому

$$f_2''(x)=\frac{1}{2\delta}[f_1'(x+\delta)-f_1'(x-\delta)];$$

следовательно,

$$f_2''(x)<\frac{1}{2\delta}\left(\frac{M}{\delta}+\frac{M}{\delta}\right)=\frac{M}{\delta^2},\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

Продолжая это рассуждение, мы увидим, что функция $\varphi(x)=f_n(x)$ имеет производные до n-го порядка включительно, причем

$$|\varphi^{(n)}(x)|=|f_n^{(n)}(x)|<\frac{M}{\delta^n},\qquad a\leqslant x\leqslant b. \tag{10}$$

Составим для $\varphi(x)$ формулу Тейлора:

$$\varphi(x)=\varphi(a)+\frac{x-a}{1}\varphi'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)+\frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(\xi),$$

где $a<\xi<x$. Эту формулу написать возможно, так как $\varphi(x)$ имеет производные до n-го порядка включительно на (a, b). На основании неравенства (10) мы имеем для остаточного члена этой формулы:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(\xi)\right|<\left|\frac{x^n}{n!}\right|\frac{M}{\delta^n}$$

Но на основании неравенства (4) отсюда следует, что

$$\left|\frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(\xi)\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

поэтому

$$\left|\varphi(x) - \left[\varphi(a) + \frac{x-a}{1}\varphi'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)\right]\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но выражение, стоящее в квадратных скобках в последней формуле, есть многочлен; поэтому, обозначая его одной буквой $Q(x)$, т. е. полагая

$$Q(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{1}\varphi'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a),$$

имеем:

$$|\varphi(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Сопоставляя неравенства (9) и (11), мы видим, что существует многочлен $Q(x)$, для которого

$$|f(x) - Q(x)| < \varepsilon, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

что и требовалось доказать.

Предложение B), а вместе с ним и теорема Вейерштрасса, являются, таким образом, доказанными. Поэтому, если нам дана любая непрерывная функция, даже не имеющая ни в какой точке производной, то ее неопределенный интеграл все же всегда можно найти. Для этого надо только, пользуясь теоремой Вейерштрасса, разложить ее в равномерно сходящийся ряд многочленов, а этот ряд уже можно почленно интегрировать на основании свойств равномерно сходящихся рядов.

Заметим, что способов доказывать теорему Вейерштрасса существует чрезвычайно много; мы ограничились лишь изложением одного из них, достаточно простого. Сущность его заключалась в том, что мы сначала приблизили функцию с наперед заданной точностью при помощи функции, имеющей n производных, а затем уже эту функцию при помощи многочлена, получающегося из ее разложения по формуле Тейлора. В основу доказательства теоремы Вейерштрасса можно класть и совершенно другие принципы[1]).

---

[1]) Интересующихся этим вопросом, а также и всем тем, что связано с теорией приближения функций, мы рекомендуем обратиться к прекрасной книге проф. В. Л. Гончарова „Теория интерполирования и приближения функций“ (ГТТИ, 1934).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

РЯДЫ ФУРЬЕ.

§ 48. Понятие о тригонометрическом ряде.

Тригонометрическим рядом принято называть ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+$$
$$+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots$$

или, короче,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

где a_0, a_n, b_n $(n=1, 2, \ldots)$ — постоянные числа, называемые *коэфициентами* ряда.

К изучению тригонометрических рядов привела поставленная еще в начале XVIII в. знаменитая проблема о звучащей струне. Эта проблема, над решением которой работали крупнейшие математики, как, например, Иван Бернулли, Эйлер, Даламбер, Даниил Бернулли, привела к необходимости поставить следующую задачу: дана функция $f(x)$; можно ли найти тригонометрический ряд, который сходится и имеет своей суммой функцию $f(x)$?

Нам уже приходилось решать аналогичную задачу при изучении степенных рядов: требовалось для заданной функции $f(x)$ найти степенной ряд, сходящийся к ней. Мы видели (§ 32), что если эта задача вообще разрешима, то таким рядом является ряд Тейлора. Но мы знаем, что не для всякой функции можно составить ряд Тейлора. Кроме того, если и возможно для заданной функции составить ряд Тейлора, то он может расходиться или сходиться не к этой функции.

Аналогично и для тригонометрических рядов, мы увидим, что нужно наложить на $f(x)$ некоторые ограничения, чтобы было возможно искать сходящийся к ней тригонометрический ряд. Если $f(x)$ этим ограничительным условиям удовлетворяет, то для нее можно, по определенному закону, составить тригонометрический ряд. Но после этого надо еще исследовать, сходится ли он и имеет ли эту функцию своей суммой.

Решение связанных с этим вопросов, а также чрезвычайно многочисленные и разнообразные приложения теории тригонометрических рядов привели к глубоким и обширным исследованиям в этой области. В нашем кратком курсе мы вынуждены ограничиться лишь самыми элементарными сведениями, да и то в очень узких рамках.

Заметим, прежде всего, что если функция $f(x)$ есть сумма тригонометрического ряда, сходящегося в каждой точке, то она — *периодическая с периодом* 2π, т. е.

$$f(x+2\pi)=f(x).$$

Действительно, так как $\sin nx$ и $\cos nx$ являются периодическими функциями с периодом 2π ($n = 1, 2, 3, \ldots$), то в равенстве

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

после замены x через $x + 2\pi$, правая часть не изменится; значит, не должна меняться и левая.

Это, однако, не означает, что в сходящиеся тригонометрические ряды можно разлагать лишь одни периодические функции с периодом 2π. Допустим, например, что $f(x)$ есть функция, определенная на некотором отрезке (a, b), лежащем между $-\pi$ и $+\pi$. Построим новую функцию $\varphi(x)$, которую определим так:

$$\varphi(x) = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b;$$

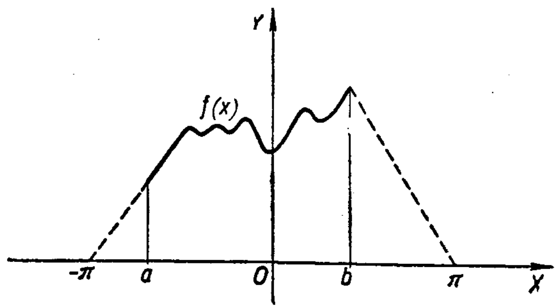
$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0;$$

$\varphi(x)$ линейна на $(-\pi, a)$ и на (b, π) (черт. 21);

наконец,

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x) \text{ для любого } x.$$

В таком случае, если удалось разложить функцию $\varphi(x)$ в тригонометрический ряд, то этот ряд на (a, b) сходится к $f(x)$, так как $f(x) = \varphi(x)$ на (a, b). Разумеется, функцию $\varphi(x)$ можно было определить между $-\pi$ и a, а также между b и π не так, как мы это сделали, а как-нибудь иначе.



Черт. 21.

Если $f(x)$ задана на отрезке длиной $< 2\pi$, но не между $-\pi$ и $+\pi$, то сдвигом начала координат мы сведем этот случай к только что рассмотренному.

Если $f(x)$ задана на отрезке длиной 2π, то достаточно положить $\varphi(x) = f(x)$ там, где $f(x)$ определена, и $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$, чтобы опять свести все к изучению периодических функций с периодом 2π.

Остается рассмотреть тот случай, когда $f(x)$ определена на отрезке (a, b) длиной $> 2\pi$, но не удовлетворяет равенству $f(x + 2\pi) = f(x)$ для всех x на этом отрезке. В этом случае она уже не может быть суммой тригонометрического ряда на всем отрезке (a, b), и можно искать для нее лишь такой тригонометрический ряд, который сходится в части этого отрезка длиной 2π. Так, например, если $f(x) = x$, то нельзя найти тригонометрический ряд, который сходится к $f(x)$ всюду; однако, как мы увидим дальше, можно найти ряд, который сходится к $f(x)$ для $-\pi < x < +\pi$.

Заметим, наконец, что если $f(x)$ — периодическая функция, но не с периодом 2π, а с некоторым периодом $2l$, то ее естественно разлагать не в ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

а в ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{l}x+b_n \sin n\frac{\pi}{l}x,$$

ибо если такой ряд сходится для некоторого x, то и для $x+2l$ он тоже сходится и имеет ту же сумму.

§ 49. Определение коэфициентов по формулам Фурье.

Принимая во внимание замечания, сделанные в предыдущем параграфе, мы в дальнейшем будем рассматривать лишь функции $f(x)$ периодические с периодом 2π. Допустим, что для такой функции существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней всюду на $(-\pi, +\pi)$, т. е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant +\pi.$$

Спрашивается, как найти коэфициенты этого ряда, зная функцию $f(x)$? Эта задача была решена Фурье.

Прежде чем излагать его метод, вычислим некоторые определенные интегралы, а именно:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin nx\, dx, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx,$$

где m и n — целые положительные числа.

Для вычисления этих интегралов воспользуемся известными из тригонометрии формулами:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Положив в них

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=mx, \quad \frac{\alpha-\beta}{2}=nx,$$

откуда

$$\alpha=(m+n)x, \quad \beta=(m-n)x,$$

найдем:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin nx\, dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}[\sin(m+n)x-\sin(m-n)x]\,dx.$$

Если $m \neq n$, то

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(m+n)x\,dx-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(m-n)x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{-\cos(m+n)x}{m+n}\Bigg|_{-\pi}^{+\pi}-\frac{1}{2}\,\frac{-\cos(m-n)x}{m-n}\Bigg|_{-\pi}^{+\pi}=0,$$

так как $\cos(m+n)x$ имеет при $x=-\pi$ и $x=+\pi$ одинаковые значения; то же справедливо и для $\cos(m-n)x$; следовательно, при $m\neq n$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx \sin nx\, dx = 0.$$

Исследуемый интеграл равен нулю и при $m=n$, так как в этом случае, если $n\neq 0$,

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin 2nx\, dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos 2nx}{2n}\Bigg|_{-\pi}^{+\pi} = 0,$$

а если $n=0$, то интеграл также равен нулю, потому что подинтегральная функция тождественно равна нулю.

Итак, каковы бы ни были целые числа m и n, положительные или равные нулю, отличные друг от друга или нет, всегда

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx \sin nx\, dx = 0.$$

Перейдем к вычислению двух других интегралов. Имеем:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m+n)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m-n)x\, dx.$$

Если $m\neq n$, то

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m+n)x\, dx = \frac{1}{2}\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\Bigg|_{-\pi}^{+\pi} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m-n)x\, dx = \frac{1}{2}\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Bigg|_{-\pi}^{+\pi} = 0;$$

следовательно, при $m\neq n$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx \cos nx\, dx = 0.$$

В случае же, когда $m=n$, мы имеем, если $n\neq 0$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}(1+\cos 2nx)\, dx = \pi + \frac{1}{2}\frac{\sin 2nx}{2n}\Bigg|_{-\pi}^{+\pi} = \pi,$$

а если $n=0$, то $\cos^2 nx = 1$, и

$$\int_{-\pi}^{+\pi}1\cdot dx = 2\pi.$$

Наконец,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos (m+n)\, x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos (m-n)\, x\, dx;$$

поэтому при $m \neq n$ находим:

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos (m+n)\, x\, dx = \frac{1}{2}\, \frac{\sin (m+n)\, x}{m+n}\Bigg|_{-\pi}^{+\pi} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos (m-n)\, x\, dx = \frac{1}{2}\, \frac{\sin (m-n)\, x}{m-n}\Bigg|_{-\pi}^{+\pi} = 0;$$

значит, при $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0.$$

Если $m = n$, то имеем при $n \neq 0$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} (1 - \cos 2nx)\, dx = \pi - \frac{1}{2}\, \frac{\sin 2nx}{2n}\Bigg|_{-\pi}^{+\pi} = \pi,$$

а при $n = 0$ интеграл равен нулю, так как подинтегральная функция равна нулю.

Подытоживая все вышесказанное, находим:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0,\ m \neq n \quad \begin{cases} m = 0, 1, 2, \ldots, \\ n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0, \qquad \begin{matrix} m \neq n \\ m = n \end{matrix} \begin{cases} m = 0, 1, 2, \ldots, \\ n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad \text{(III)}$$

В частности, первая из формул (I) при $m = 0$ дает:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\, dx = 0, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \qquad \text{(IV)}$$

а формула (II) при $m = 0$ дает:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\, dx = 0, \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots. \qquad \text{(V)}$$

Установив эти формулы, возвратимся к методу Фурье. Мы имеем, по условию, всюду на $(-\pi, +\pi)$:

x)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \qquad (A)$$

Следуя Фурье, проинтегрируем этот ряд почленно в пределах $(-\pi, +\pi)$. Мы знаем, что далеко не всегда интегрирование ряда законно. Другими словами, мы не можем поручиться за то, что интеграл от нашей функции $f(x)$ совпадает с результатом чисто формально произведенного интегрирования ряда. Не останавливаясь пока на вопросе о том, когда почленное интегрирование тригонометрического ряда законно, изучим сначала те следствия, к которым приводит это интегрирование в тех случаях, когда мы вправе его выполнять. Имеем тогда:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{+\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{+\pi} b_n \sin nx\,dx \right).$$

Так как $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = a_0\pi$, а на основании формул (IV) и (V) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} a_n \cos nx\,dx &= a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\,dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} b_n \sin nx\,dx &= b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\,dx = 0 \end{aligned}\right\} \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

то в результате интегрирования найдем:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = a_0\pi,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx.$$

Точно так же, если бы мы до интегрирования помножили обе части равенства (A) на $\cos mx$, а затем проинтегрировали его, то нашли бы:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\,dx + \right.$$

$$\left. + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin nx\,dx \right).$$

Но на основании формул (I), (II) и (IV) все интегралы в правой части равенства равны нулю, кроме интеграла, стоящего множителем при a_m, а этот последний, на основании (III), равен π; поэтому

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx\,dx = a_m\pi,$$

откуда

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx\,dx.$$

В этом равенстве m может быть любым целым числом ($m=1, 2, 3, \ldots$).

Если обе части равенства (A) умножим не на $\cos mx$, а на $\sin mx$, аналогичными рассуждениями придем к следующей формуле:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin mx\,dx, \qquad m=1,\ 2,\ 3, \ldots .$$

Следовательно, если функция $f(x)$ может быть суммой тригонометрического ряда, то его коэфициенты определяются по формулам Фурье:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad n=0,\ 1,\ 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n=1,\ 2,\ 3, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (F)$$

[при $n=0$ мы имеем $\cos nx = 1$, и потому формула $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx$ может рассматриваться как частный случай формулы $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx$].

Коэфициенты тригонометрического ряда, определяемые формулами (F), носят название *коэфициентов Фурье*, а самый ряд с этими коэфициентами называется *рядом Фурье* для функции $f(x)$.

Собирая вместе все сказанное, мы приходим к такому выводу: **Если функция $f(x)$ есть сумма тригонометрического ряда, сходящегося на $(-\pi, +\pi)$ и допускающего почленное интегрирование, то этот ряд должен быть ее рядом Фурье.**

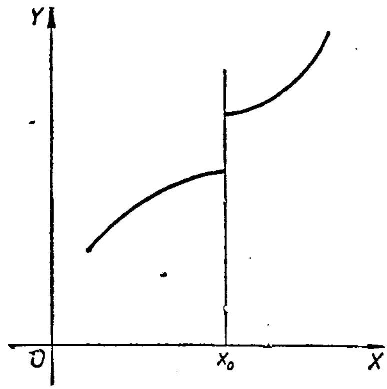
§ 50. О функциях, изобразимых рядами Фурье.

Спросим себя теперь, для каких функций можно составить ряд Фурье. Как показывают формулы (F) предыдущего параграфа, для этого необходимо, чтобы функцию $f(x)$ можно было интегрировать на $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Поэтому мы будем предполагать $f(x)$ ограниченной, так как для неограниченных функций интеграл не всегда существует. Кроме того, если пользоваться обычным определением интеграла (интегралом Коши), то можно интегрировать лишь функции непрерывные или имеющие конечное число точек разрыва первого рода[1]). Условимся называть функцию $f(x)$ *кусочно-непрерывной* на некотором отрезке (a, b), если она на нем или непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода [это название имеет целью показать, что отрезок разбивается на конечное число отрезков (кусков), на каждом из которых функция непрерывна].

[1]) Точку x_0 называют точкой разрыва первого рода для функции $f(x)$, если, при приближении x к x_0 слева, $f(x)$ стремится к определенному пределу [следуя Дирихле, этот предел обозначают $f(x_0-0)$] и, при приближении x к x_0 справа, $f(x)$ также стремится к определенному пределу [его обозначают $f(x_0+0)$], но при этом $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ (черт. 22).

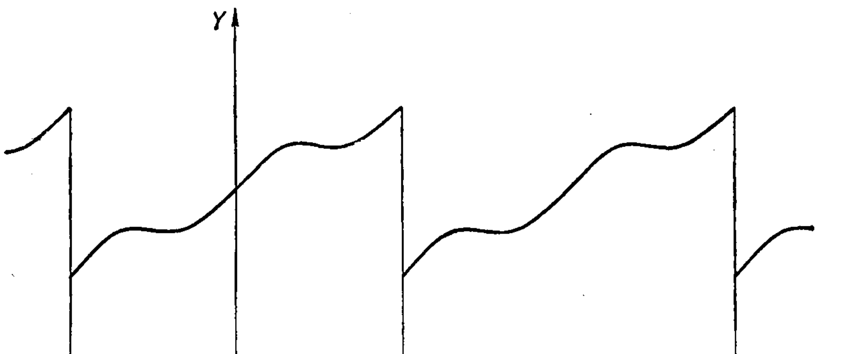
Кроме того, предполагается, что при приближении точек к одному из концов отрезка функция также стремится к определенному пределу, т. е. что существуют $f(a+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(a+\varepsilon)$ и $f(b-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(b-\varepsilon)$, если только ε положительно.

Легко видеть, что кусочно-непрерывная функция должна быть ограниченной, так как на каждом отрезке, где она непрерывна, она ограничена, а около точек разрыва, также и в концах отрезка, она не может становиться неограниченной, так как иначе, при $\varepsilon>0$, величины $f(x+\varepsilon)$ и $f(x-\varepsilon)$ не стремились бы к определенным пределам при $\varepsilon\to 0$. Во всем дальнейшем мы будем рассматривать лишь функции *периодические с периодом* 2π, *кусочно-непрерывные на* $(-\pi, +\pi)$ (и, следовательно, ограниченные на этом отрезке).



Черт. 22.

Заметим здесь же, что если $f(-\pi+0)\neq f(\pi-0)$, то точки $-\pi$ и π являются точками разрыва первого рода для рассматриваемой периодической функции $f(x)$ и поэтому, даже если $f(x)$ непрерывна на $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ (как это имеет место на чертеже 23), мы не можем сказать, что она всюду непрерывна. Впоследствии нам придется специально говорить о периодических функциях, непрерывных на всей бесконечной прямой; для таких функций должно соблюдаться не только требование непрерывности на $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, но и условие $f(-\pi+0)=f(\pi-0)$.



Черт. 23.

Возвращаясь к общему случаю функции с периодом 2π, кусочно-непрерывной на $(-\pi, +\pi)$, мы можем сказать, что такие функции всегда интегрируемы, и поэтому мы можем найти интегралы, входящие в формулы Фурье. Вычислив величины a_n и b_n $(n=0, 1, 2,\ldots)$ по этим формулам и составив при их помощи ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

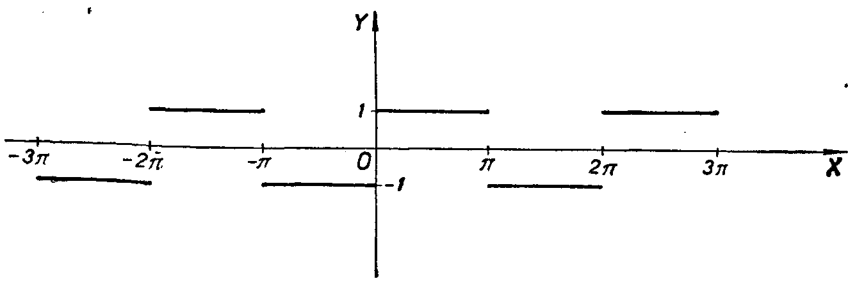
мы будем говорить, что нашли разложение $f(x)$ в ряд Фурье. Но, разумеется, чисто формальные операции, которые мы произвели, чтобы найти ряд Фурье для $f(x)$, не дают нам права утверждать, что мы получили ряд сходящийся и тем более сходящийся именно к функции $f(x)$.

В этом отношении мы имеем полную аналогию со случаем степенных рядов; если для функции $f(x)$ можно найти все ее производные в некоторой точке $x=a$, то можно составить для нее ряд Тейлора, но нельзя еще утверждать, что этот ряд сходится, а если и сходится, то именно к $f(x)$.

Поэтому нужно твердо помнить, что если мы нашли для $f(x)$ ее ряд Фурье или, как говорят, разложили ее в ряд Фурье, то это еще не значит, что мы нашли ряд, сходящийся к $f(x)$. Если тригонометрический ряд сходится к $f(x)$ и если он допускает почленное интегрирование, то он является рядом Фурье, но отсюда ни в коем случае не следует, что ряд Фурье должен сходиться, и можно показать на примерах, что даже непрерывные функции могут иметь ряды Фурье, расходящиеся в бесконечном множестве точек на $(-\pi, +\pi)$.

§ 51. Примеры разложения функций в ряд Фурье.

Мы сейчас покажем на примерах, как находить ряд Фурье для заданной функции $f(x)$, оставляя пока совершенно в стороне вопрос о сходимости этих рядов.



Черт. 24.

Пример 1. Пусть $f(x)$ — периодическая с периодом 2π функция, равная -1 на $-\pi<x<0$, равная $+1$ на $0<x<+\pi$, равная 0 в точках $-\pi$, $0, +\pi$ (черт. 24). Эта функция имеет в точках $-\pi$, 0 и $+\pi$ разрывы первого рода. Для того чтобы написать ее разложение в ряд Фурье, вычислим коэфициенты a_n и b_n по формулам Фурье. Имеем для $n\neq 0$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi}(+1)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{-\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{0}^{+\pi}=0,\qquad n=1, 2, 3, \ldots;$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\pi}(+1)\,dx = -\frac{1}{\pi}\pi + \frac{1}{\pi}\pi = -1 + 1 = 0.$$

Далее,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\pi}(+1)\sin nx\,dx =$$

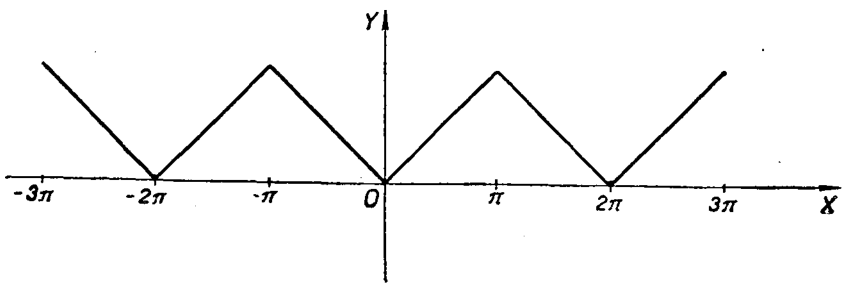
$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\,\frac{-\cos nx}{n}\Bigg|_{0}^{+\pi} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1-\cos n\pi}{n} + \frac{1}{\pi}\,\frac{-\cos n\pi + 1}{n} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Так как при n четном $\cos n\pi = 1$, а при n нечетном $\cos n\pi = -1$, то $b_n = 0$ при n четном, $b_n = \frac{4}{n\pi}$ при n нечетном.

Ряд Фурье для нашей функции имеет вид:

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \ldots\right).$$



Черт. 25.

Пример 2. Пусть $f(x)$ — периодическая с периодом 2π функция, равная $-x$ на $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ и равная $+x$ на $0 \leqslant x \leqslant \pi$ (черт. 25). Эта функция непрерывна на всей бесконечной прямой. Найдем ее коэффициенты Фурье. Имеем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\pi}(+x)\cos nx\,dx;$$

если мы в первом интеграле заменим $-x$ на t, а затем переставим пределы интеграции, то получим:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{+\pi}^{0} t\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\pi} t\cos nt\,dt;$$

следовательно, второй интеграл равен первому, а потому

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\pi} x\cos nx\,dx.$$

Интегрируя по частям, найдем для $n \neq 0$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{+\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{+\pi}\sin nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{+\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1).$$

Если n четное, то $\cos n\pi = 1$, а потому $a_n = 0$; если n нечетное, то $\cos n\pi = -1$ и $a_n = -\frac{4}{n^2\pi}$.

Для $n = 0$ имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{+\pi} = \pi.$$

Наконец, для b_n найдем:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\pi}(+x)\sin nx\,dx;$$

но, заменив в первом интеграле $-x$ на t и переставив пределы интеграции, получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{+\pi}^{0} t\sin nt\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\pi} t\sin nt\,dt;$$

поэтому первый интеграл равен второму по абсолютной величине, но имеет обратный знак, откуда $b_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Таким образом, ряд Фурье для рассматриваемой функции будет иметь вид:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots\right).$$

§ 52. Стремление к нулю коэфициентов Фурье.

Докажем, что для всякой кусочно-непрерывной функции

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \tag{1}$$

где a_n и b_n — коэфициенты Фурье.

С этой целью докажем, что каковы бы ни были числа a и b, если $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке (a, b), то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0. \tag{2}$$

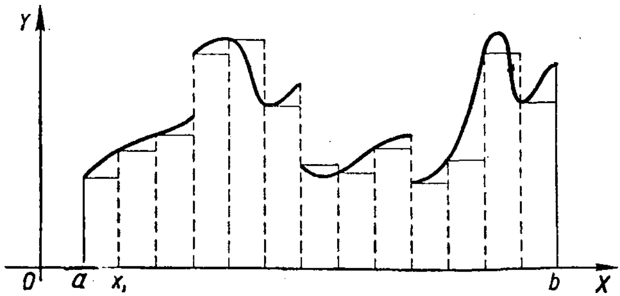
Чтобы убедиться в этом, возьмем положительное число ε и разобьем отрезок (a, b) на конечное число отрезков так, чтобы на каждом из них разность $f(x')-f(x'')$ была по абсолютной величине $<\varepsilon$ для любых двух точек x' и x'' такого отрезка. Это всегда возможно сделать, если только точки разрыва сделать точками разбиения, ибо на тех отрезках, где функция непрерывна, можно добиться нужного результата, сделав точки разбиения достаточно близкими (этот процесс употребляют для доказательства существования интеграла от непрерывной функции). Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ точки разбиения; положим $a=x_0$ и $b=x_k$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, которую определим так: если x_i есть точка, где $f(x)$ непрерывна, мы просто полагаем:

$$\varphi(x)=f(x_i) \text{ на } (x_i, x_{i+1});$$

если же x_i точка разрыва, мы полагаем:

$$\varphi(x)=f(x_i+0) \text{ на } (x_i, x_{i+1});$$



Черт. 26.

и так для всякого i $(i=0, 1, 2, \ldots, k-1)$. Таким образом, $\varphi(x)$ состоит из конечного числа отрезков, параллельных оси абсцисс (черт. 26).

Пусть

$$f(x)-\varphi(x)=R(x);$$

тогда

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx=\int_a^b \varphi(x)\cos nx\,dx+\int_a^b R(x)\cos nx\,dx. \tag{3}$$

Но так как по самому построению функции $\varphi(x)$ мы имеем для $x_i<x<x_{i+1}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, k-1)$:

$$f(x)-\varphi(x)=f(x)-f(x_i)$$

или

$$f(x)-\varphi(x)=f(x)-f(x_i+0),$$

то

$$|R(x)|=|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

для $x_i<x<x_{i+1}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, k-1)$. Поэтому, так как $|\cos nx|\leqslant 1$ при всех x, то

$$\left|\int_a^b R(x)\cos nx\,dx\right|=\left|\sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} R(x)\cos nx\,dx\right|<\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx=\varepsilon(b-a). \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\int_a^b \varphi(x)\cos nx\,dx = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(x)\cos nx\,dx = \sum_{i=0}^{k-1} c_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\cos nx\,dx, \tag{5}$$

где через c_i обозначена величина $\varphi(x)$ на (x_i, x_{i+1}). Но

$$\left|\int_{xi}^{x_{i+1}}\cos nx\,dx\right| = \left|\frac{\sin nx_{i+1} - \sin nx_i}{n}\right| \leqslant \frac{2}{n},$$

так как $|\sin nx| \leqslant 1$ для любого x. Замечая, что $c_i = f(x_i)$ или $f(x_i + 0)$, мы можем сказать, что так как $f(x)$ кусочно-непрерывна и, следовательно, ограничена на (a, b), то найдется такое M, что

$$|f(x)| < M \quad \text{на } (a, b), \tag{6}$$

а потому

$$|c_i| < M, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, k-1. \tag{7}$$

Из формулы (5), на основании (6) и (7), находим:

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\cos nx\,dx\right| < \frac{2Mk}{n}, \tag{8}$$

где k число отрезков нашего разбиения, т. е. k не зависит от n.

Выберем теперь N столь большим, чтобы для $n > N$

$$\frac{2Mk}{n} < \varepsilon,$$

где ε — наперед заданное число. Тогда из неравенства (8) получаем:

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\cos nx\,dx\right| < \varepsilon. \tag{9}$$

На основании формул (3), (4) и (9) имеем для $n > N$:

$$\left|\int_a^b f(x)\cos nx\,dx\right| < \varepsilon(b - a + 1);$$

а так как ε как угодно мало, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство повторяется слово в слово для интеграла, в котором $\cos nx$ заменен через $\sin nx$.

Так как здесь a и b какие угодно, то полагая, в частности, $a = -\pi$ и $b = +\pi$, находим:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0,$$

а значит,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

§ 53. Интеграл Дирихле.

Для того чтобы изучить, в каких случаях ряд Фурье сходится и имеет своей суммой данную функцию $f(x)$, мы, прежде всего, следуя Дирихле, представим сумму конечного числа первых членов ряда Фурье для $f(x)$ в виде некоторого интеграла. Пусть

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Так как коэфициенты a_k и b_k определяются по формулам Фурье, то

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos kt\, dt, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin kt\, dt, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Поэтому

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos kt\, dt\right)\cos kx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin kt\, dt\right)\sin kx\right].$$

Так как интегрирование производится по переменному t, то величины $\cos kx$ и $\sin kx$ могут, как постоянные, быть внесены под знак интеграла, и мы найдем:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos kt \cos kx\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin kt \sin kx\, dt\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos k(t-x)\, dt,$$

так как $\cos k(t-x) = \cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx$.

Наконец, замечая, что интеграл суммы равен сумме интегралов, находим:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right] dt =$$

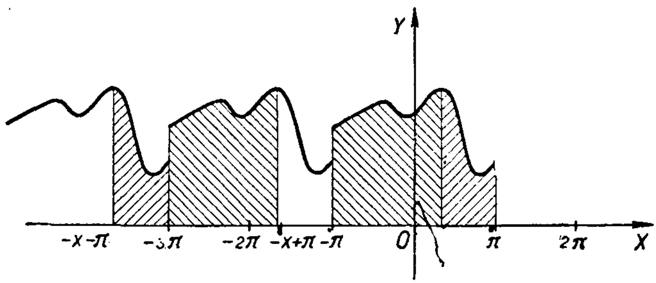
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right] dt.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменного, полагая $t - x = z$:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+z)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kz\right] dz;$$

но так как $f(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π и косинусы тоже, то $\int\limits_{-x-\pi}^{-x+\pi}$ можно заменить интегралом $\int\limits_{-\pi}^{+\pi}$, так как в силу периодичности подинтегральной функции здесь дело сводится к замене некоторых площадей другими, равными им площадями (черт. 27). Отсюда мы заключаем, что предыдущую формулу можно переписать в виде:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x+z)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kz\right]dz. \tag{1}$$



Черт. 27.

Нам теперь необходимо преобразовать сумму, стоящую в квадратных скобках; мы обозначим ее через $\sigma(z)$, т. е. положим:

$$\sigma(z) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kz = \frac{1}{2}+\cos z+\cos 2z+\ldots+\cos nz.$$

Для вычисления величины этой суммы умножим ее на $2\sin\frac{z}{2}$; это дает:

$$2\sin\frac{z}{2}\,\sigma(z) = \sin\frac{z}{2}+2\sin\frac{z}{2}\cos z+2\sin\frac{z}{2}\cos 2z+\ldots+2\sin\frac{z}{2}\cos nz.$$

Так как

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

то, полагая

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = kz, \qquad \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{z}{2},$$

найдем:

$$\alpha = \left(k+\frac{1}{2}\right)z, \quad \beta = \left(k-\frac{1}{2}\right)z,$$

а потому

$$2\sin\frac{z}{2}\cos kz = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)z-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)z.$$

Следовательно,

$$2\sin\frac{z}{2}\sigma(z) = \sin\frac{z}{2}+\left(\sin\frac{3}{2}z-\sin\frac{1}{2}z\right)+\left(\sin\frac{5}{2}z-\sin\frac{3}{2}z\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)z-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)z\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)z\right],$$

и так как в этой формуле все члены попарно уничтожаются, кроме $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z$,

то

$$2\sin\frac{z}{2}\,\sigma(z)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z,$$

откуда

$$\sigma(z)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kz=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}.$$

Подставляя это выражение в формулу для $S_n(x)$, найдем:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x+z)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz. \tag{2}$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, принято называть *интегралом Дирихле*. Для того чтобы воспользоваться им при решении вопроса о сходимости ряда Фурье, его обычно еще несколько преобразуют. Именно, заметив, что

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+z)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+z)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz,$$

и заменив в первом из этих интегралов z через $-z$, найдем:

$$S_n(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0}f(x-z)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+z)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz,$$

или

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+z)+f(x-z)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz. \tag{3}$$

Для дальнейшего полезно заметить, что эта формула была выведена для любой кусочно-непрерывной функции $f(x)$; в частности, она верна и для любой непрерывной функции. Если положить $f(x)=1$, то для такой функции, как легко сообразить, в ряде Фурье будут равны нулю все члены, кроме свободного, который равен единице, а потому для такой функции $S_n(x)=1$ при любых n и x. Подставив в последнюю формулу вместо $S_n(x)$ единицу, а также и единицу вместо $f(x+z)$ и $f(x-z)$, найдем:

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}2\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz.$$

Умножим обе части этого равенства на $f(x)$. Так как интеграция ведется по z, то $f(x)$ можно ввести под знак интеграла, что дает;

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz. \tag{4}$$

Наконец, заметим, что при решении вопроса о сходимости ряда Фурье к $f(x)$, надо будет оценивать разность $f(x)-S_n(x)$: если для некоторого x эта разность стремится к нулю при $n\to\infty$, то ряд Фурье в такой точке сходится к $f(x)$; это приводит нас к необходимости выразить эту разность в удобной для оценки форме. С этой целью вычитаем из равенства (3) равенство (4), что дает:

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x+z)+f(x-z)-2f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz. \tag{5}$$

§ 54. Сходимость ряда Фурье в простейших случаях.

Рассмотрим функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям:

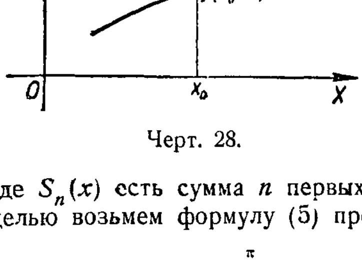
1) $f(x)$ кусочно-непрерывна на $(-\pi, +\pi)$;

2) $f(x)$ имеет производную всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, и эта производная в свою очередь кусочно-непрерывна на $(-\pi, +\pi)$;

3) если x_0 есть точка разрыва для $f(x)$, то значение ее в этой точке определяется так:

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

т. е. ее значение в точке разрыва есть среднее арифметическое чисел $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, или, говоря геометрически, оно изображается в виде середины отрезка между $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ (черт. 28).



Черт. 28.

Докажем, что **для функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям 1), 2) и 3), ряд Фурье сходится в каждой точке и имеет $f(x)$ своей суммой.**

Чтобы доказать это предложение, мы должны доказать, что для любого x, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$,

$$\lim_{n\to\infty}[S_n(x)-f(x)]=0,$$

где $S_n(x)$ есть сумма n первых членов ряда Фурье для $f(x)$. С этой целью возьмем формулу (5) предыдущего параграфа:

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x+z)+f(x-z)-2f(x)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz.$$

Пусть x — любая точка на $(-\pi, +\pi)$. Мы можем всегда считать, что

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

так как для точек разрыва это имеет место на основании условия 3), а для точек непрерывности $f(x+0)=f(x)$ и $f(x-0)=f(x)$. На этом основании можно писать:

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{f(x+z)+f(x-z)-[f(x+0)+$$
$$+f(x-0)]\}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz. \qquad (1)$$

Мы предполагали функцию $f(x)$ кусочно-непрерывной и имеющей кусочно-непрерывную производную. Поэтому можно найти столь малое δ, чтобы на отрезке от x до $x+\delta$ функция $f(x)$ была сама непрерывна и ее производная $f'(x)$ существовала бы в каждой точке и была непрерывна. Можно также предположить, что это верно от $x-\delta$ до x. На этом основании можно утверждать, что если δ достаточно мало, то

$$\left.\begin{aligned} f(x+z)-f(x+0)&=zf'(\xi_1)\\ f(x-z)-f(x-0)&=-zf'(\xi_2),\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и

где $0<z<\delta$, $x<\xi_1<x+z$, $x-z<\xi_2<x$.

Эти формулы получаются применением теоремы Лагранжа о конечном приращении к разности $f(x+z)-f(x+\eta)$ или к разности $f(x-z)-f(x-\eta)$, где затем η заставляют стремиться к нулю и замечают, что $f(x+0)=\lim\limits_{\eta\to 0} f(x+\eta)$ и аналогично для $f(x-0)$.

Заметив это, разобьем интеграл формулы (1) на два интеграла, от 0 до δ и от δ до π:

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \{[f(x+z)-f(x+0)]+$$
$$+[f(x-z)-f(x-0)]\}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz+\frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \{[f(x+z)+$$
$$+f(x-z)]-[f(x+0)+f(x-0)]\}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz. \qquad (3)$$

Применив к первому из этих интегралов, который обозначим через $J_n^{(1)}(x)$, формулы (2), найдем:

$$J_n^{(1)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta [f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]\, z\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\,dz=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]\left(\frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\,dz.$$

Так как $f'(x)$ кусочно-непрерывна, то она ограничена, т. е. найдется такое K, что $|f'(x)| < K$. Заметим кроме того, что $\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right| \leqslant 1$ и что $\frac{\alpha}{\sin\alpha} \to 1$ при $\alpha \to 0$; поэтому, когда z изменяется от 0 до δ, то $\frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}$ остается при малом δ близким к 1 и уже во всяком случае < 2. Отсюда

$$|J_n^{(1)}(x)| < \frac{1}{\pi}\int_0^\delta 2K \cdot 2 \cdot 1 \cdot dz = \frac{4K\delta}{\pi}. \tag{4}$$

Пусть ε — число положительное и как угодно малое. Мы можем выбрать δ настолько малым, чтобы

$$\frac{4K\delta}{\pi} < \varepsilon \tag{5}$$

и, кроме того, чтобы $f(x)$ и $f'(x)$ были непрерывны от x до $x+\delta$ и от $x-\delta$ до x. Выбрав такое δ, мы его больше не будем менять; предыдущие рассуждения показывают, что для такого δ имеем, на основании (4) и (5):

$$|J_n^{(1)}(x)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь второй интеграл формулы (3), который обозначим через $J_n^{(2)}(x)$. Заметив, что

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}} = \frac{\sin nz\cos\frac{z}{2} + \cos nz\sin\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{z}{2}\sin nz + \cos nz,$$

мы можем написать:

$$J_n^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi [f(x+z) + f(x-z) - f(x+0) - $$

$$- f(x-0)]\operatorname{ctg}\frac{z}{2}\sin nz\,dz + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi [f(x+z) +$$

$$+ f(x-z) - f(x+0) - f(x-0)]\cos nz\,dz. \tag{7}$$

При постоянном x выражение

$$\varphi(z) = f(x+z) + f(x-z) - f(x+0) - f(x-0) \tag{8}$$

есть функция от z, которая, разумеется, будет кусочно-непрерывной, как и $f(x)$. Так как $\delta > 0$, то $\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$ есть непрерывная функция на (δ, π), а потому $\varphi(z)\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$ кусочно-непрерывна. Но тогда, на основании результатов § 52, где мы полагаем $a=\delta$ и $b=\pi$, можно утверждать, что для достаточно большого N мы будем иметь:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\varphi(z)\operatorname{ctg}\frac{z}{2}\sin nz\,dz\right|<\varepsilon \text{ при } n>N \tag{9}$$

и аналогично

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\varphi(z)\cos nz\,dz\right|<\varepsilon \quad \text{при} \quad n>N. \tag{10}$$

На основании формул (7), (8), (9) и (10) мы получаем:

$$\left|J_n^{(2)}(x)\right|<2\varepsilon \tag{11}$$

для n достаточно большого. Неравенства (6), (11) и формула (3) дают окончательно:

$$\left|S_n(x)-f(x)\right|<3\varepsilon,$$

если только n достаточно велико, а так как ε как угодно мало, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x),$$

и теорема доказана.

Из этой теоремы, между прочим, следует, что в обоих примерах, рассмотренных нами в § 51, ряд Фурье сходится в каждой точке и имеет суммой данную функцию $f(x)$. В самом деле, во втором примере $f(x)$ была непрерывна и имела производную непрерывную, кроме точек $-\pi$, 0, π, а в первом примере функция имела разрывы лишь в точках $-\pi$, 0, π, и ее производная была равна нулю всюду кроме этих точек; кроме того, функция в точках разрыва была, по условию, равна нулю, т. е. как раз равна среднему арифметическому между значениями $-\pi$ и $+\pi$, к которым она стремится, когда точка x подходит к точке разрыва только с одной стороны. Таким образом, в обоих случаях $f(x)$ удовлетворяет всем условиям доказанной теоремы, а потому ряд Фурье сходится к ней в каждой точке.

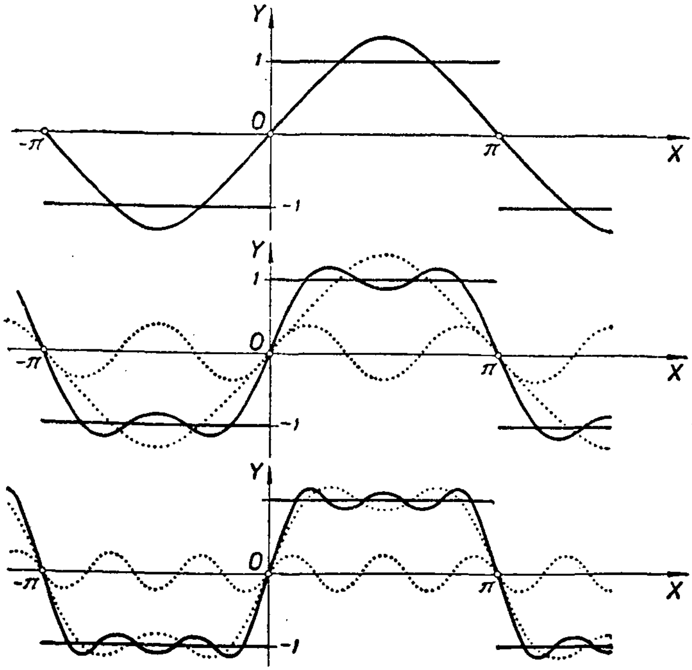
Интересно представить себе наглядно, как с увеличением числа слагаемых частные суммы ряда все ближе и ближе подходят к $f(x)$. Рассмотрим это на первом примере.

На чертеже 29 представлены сначала первый член ряда

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right),$$

затем первый и второй члены пунктиром, а их сумма — сплошной линией, наконец, сумма двух первых членов и третий член пунктиром, а сумма всех трех — сплошной линией. Мы видим, как приближающая непрерывная кривая все ближе и ближе подходит к основной разрывной кривой, равной -1 на $-\pi<x<0$ и $+1$ на $0<x<+\pi$.

Возвращаясь от примера к общей теореме, заметим, что, всматриваясь ближе в ее доказательство, мы могли бы обнаружить следующее: для функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям теоремы, ряд Фурье сходится равномерно во всяком интервале, целиком лежащем между любыми двумя



Черт. 29.

точками разрыва функции. Мы не будем останавливаться на этом и рассмотрим в § 60 лишь один интересный частный случай, где сходимость ряда Фурье будет равномерной на любом отрезке.

§ 55. Среднее квадратическое уклонение тригонометрического многочлена от заданной функции.

Если функция $f(x)$ даже не имеет разрывов, но у нее на $(-\pi, +\pi)$ нет производной, или эта производная не является кусочно-непрерывной на $(-\pi, +\pi)$, то теорема предыдущего параграфа уже неприменима. И действительно, можно построить непрерывные функции, у которых ряд Фурье имеет точки расходимости во всяком интервале δ, как бы мал ни был этот интервал и где бы он ни помещался на $(-\pi, +\pi)$.

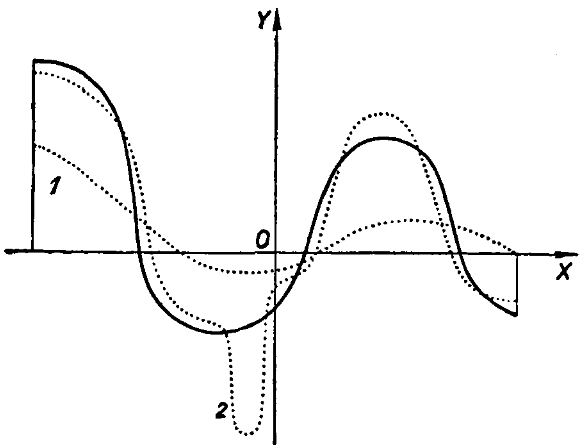
Нужно ли отсюда заключить, что в этом случае частные суммы ряда Фурье уже не могут служить для приближенного изображения нашей функции? Мы сейчас покажем, что если слово „приближение“ понимать в несколько ином смысле, чем это понималось до сих пор, то ряд Фурье является прекрасным инструментом для приближенного изображения функции. Чтобы уяснить себе, каков будет в дальнейшем наш взгляд на приближение одних функций к другим функциям, обратимся к известному из теории вероятностей понятию о „средней квадратической ошибке“.

Пусть мы измеряем некоторую величину y много раз и при ее измерении нашли значения $y_1, y_2, \ldots, y_N$; ошибка при k-м измерении есть $y - y_k$, где $k = 1, 2, \ldots, N$. Так как ошибки могут быть как положительными, так и отрицательными, то удобнее всего рассматривать квадрат ошибки, так как эта величина всегда положительна и мала, если сама ошибка мала[1]). Если положить

$$\delta^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (y - y_k)^2,$$

т. е. взять δ равным корню квадратному из среднего арифметического квадратов ошибок, то δ называется *средней квадратической ошибкой*. При обработке результатов наблюдений эту ошибку стремятся сделать наименьшей.

Допустим теперь, что мы не измеряем некоторую постоянную величину y, а рассматриваем некоторую кривую $y = f(x)$ и хотим оценить



Черт. 30.

ошибку, которую мы делаем, заменяя эту кривую некоторой другой кривой $y = \varphi(x)$. Можно рассматривать разность $|f(x) - \varphi(x)|$ как уклонение одной кривой от другой в точке x. Когда мы говорили в теории рядов, что $s_n(x)$, т. е. сумма n первых членов ряда, служит приближением к сумме $S(x)$ ряда, мы имели в виду именно тот факт, что для всякого x разность $|S(x) - s_n(x)|$, т. е. уклонение $s_n(x)$ от $S(x)$, стремится к нулю с возрастанием n. Однако бывают случаи, когда гораздо естественнее рассматривать вместо этого простого уклонения среднее квадратическое уклонение. Поясним эту мысль чертежом (черт. 30). Пусть сплошная линия изображает заданную кривую $y = f(x)$, а пунктирные линии изображают приближающиеся к ней кривые. Ясно, что пунктирная линия *1* ни в какой точке не уклоняется от кривой $y = f(x)$ на такие большие расстояния, на какие в некоторых точках отклоняется от нее линия *2*; но если не беспокоиться о том, что в некоторых (узких) промежутках линия *2* сильно уклоняется от $y = f(x)$, а рассмотреть, как она себя ведет на всем отрезке, то приходится признать, что она гораздо

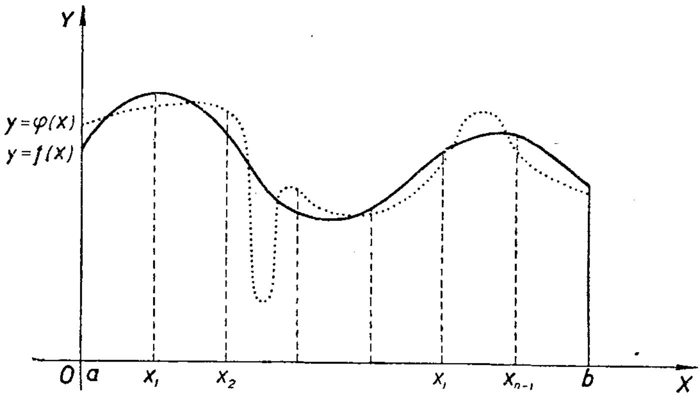
[1]) Можно было бы рассматривать абсолютную величину ошибки, но оперирование с абсолютными величинами при вычислениях гораздо сложнее, чем с квадратами.

ближе характеризует функцию $f(x)$, т. е. является для нее лучшим приближением, чем линия *1*.

Именно эта мысль и положена в основу метода „приближения в среднем“. Допустим, что мы рассматриваем две кривые: $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ на некотором отрезке (a, b). Разделим (a, b) на n равных частей (черт. 31). Обозначив точки деления через $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}$, полагаем $x_0=a$ и $x_n=b$. Если рассматривать разность $f(x_i)-\varphi(x_i)$ как ошибку, которую мы делаем, заменяя величину $f(x_i)$ через $\varphi(x_i)$, то, полагая

$$\Delta^2=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)-\varphi(x_i)]^2,$$

мы могли бы назвать Δ средней квадратической ошибкой при замене $f(x)$ через $\varphi(x)$. Однако совершенно ясно, что эта ошибка зависит не только



Черт. 31.

от функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, но и от того, в каких точках x_i мы рассматривали разность их ординат. Совершенно очевидно, что чем больше точек мы будем брать при разбиении (a, b) на части, тем лучше сможем охарактеризовать „среднее“ уклонение $\varphi(x)$ от $f(x)$. Условимся называть *средним квадратическим уклонением* функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ тот предел, к которому стремится выражение Δ, когда число точек разбиения (a, b) неограниченно возрастает. Нетрудно доказать, что этот предел существует, и найти его величину.

Так как мы делили отрезок (a, b) на n равных частей, то каждое из расстояний x_i-x_{i-1} должно быть равно $\frac{b-a}{n}$; поэтому, полагая $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, мы имеем: $\frac{1}{n}=\frac{\Delta x_i}{b-a}$, $i=1, 2, \ldots, n$, и, следовательно,

$$\Delta^2=\frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)-\varphi(x_i)]^2\Delta x_i.$$

Но сумма, стоящая в правой части, имеет своим пределом определенный интеграл от $[f(x)-\varphi(x)]^2$ на отрезке (a, b); поэтому

$$\lim\Delta^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]^2\,dx,$$

Обозначая $\lim \Delta^2$ через δ^2, мы видим, что величина δ и есть среднее квадратическое уклонение функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$.

Совершенно ясно, что если $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$, то

$$\delta^2<\frac{\varepsilon^2}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon^2,$$

значит, $|\delta|<\varepsilon$, откуда следует, что если уклонение в обычном смысле слова мало для всех x, то мало и среднее квадратическое уклонение.

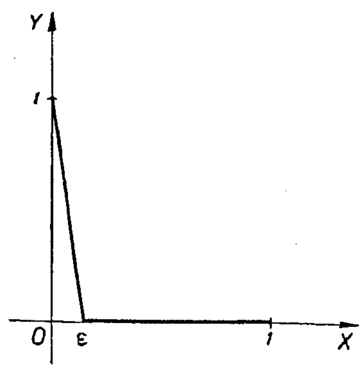
Но обратное уже не будет верным. Действительно (черт, 32), пусть, например, $f(x)\equiv 0$, а $\varphi(x)=1-\frac{x}{\varepsilon}$ на $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$, $\varphi(x)\equiv 0$ на $\varepsilon\leqslant x\leqslant 1$. Ясно, что $\varphi(x)$ не может быть названа приближающей кривой для $f(x)$ в обычном смысле этого слова, так как, например, при $x=0$ имеем:

$$|f(0)-\varphi(0)|=|0-1|=1.$$

Но $\varphi(x)$ при малых ε дает хорошее приближение в среднем к $f(x)$, ибо

$$\int_0^1[f(x)-\varphi(x)]^2\,dx=\int_0^\varepsilon\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)^2dx=-\frac{\varepsilon}{3}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)^3\Bigg|_0^\varepsilon=\frac{\varepsilon}{3}.$$

Перейдем теперь от общих рассмотрений, касающихся среднего квадратического уклонения, к специальному вопросу, именно к уклонению так называемых тригонометрических многочленов от заданной функции.



Черт. 32.

Тригонометрическим многочленом n-го порядка называется выражение вида:

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx,$$

где α_k и β_k — постоянные числа ($k=0$, $1, 2, \ldots, n$). Займемся решением следующей проблемы: среди всех тригонометрических многочленов порядка n найти тот, который дает „наилучшее приближение в среднем“ к данной функции $f(x)$, т. е. тот, для которого среднее квадратическое уклонение от $f(x)$ будет наименьшим. Функцию $f(x)$ будем, как всегда, предполагать периодической с периодом 2π и кусочно-непрерывной.

Мы должны решить вопрос, как надо подобрать коэфициенты α_k, β_k ($k=0, 1, 2, \ldots, n$) тригонометрического многочлена для того, чтобы его среднее квадратическое уклонение от $f(x)$ было наименьшим, т. е. чтобы выражение

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right]^2dx$$

имело наименьшее из возможных своих значений. Для решения этого вопроса вычислим величину δ_n^2.

Имеем:

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right]^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx-$$

$$-\left[\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx+\beta_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left[\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha_k^2\cos^2 kx\,dx+\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{+\pi}\beta_k^2\sin^2 kx\,dx+\right.$$

$$+2\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=0}^{n}\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha_k\alpha_j\cos kx\cos jx\,dx+2\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha_k\beta_j\cos kx\sin jx\,dx+$$

$$\left.+2\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=0}^{n}\int_{-\pi}^{+\pi}\beta_k\beta_j\sin kx\sin jx\,dx\right].$$

Но, обозначая через a_n и b_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ коэфициенты Фурье для $f(x)$, мы видим, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx=a_k,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx=b_k.$$

Кроме того, на основании формул (I), (II) и (III) § 49 видим, что три последние суммы в квадратных скобках равны нулю, так как равен нулю каждый из входящих в них интегралов, а в двух предшествующих суммах интегралы после вынесения за скобку постоянных множителей равны π (для $k\neq 0$); поэтому

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx-\alpha_0a_0-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)+\alpha_0^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2).$$

Прибавляя к правой части равенства и вычитая из нее одно и то же количество

$$\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

найдем:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx + \left(\frac{a_0}{2} - \alpha_0\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right] -$$

$$- \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Заметим теперь, что в правой части равенства скобки $\left(\frac{a_0}{2} - \alpha_0\right)^2$, $(\alpha_k - a_k)^2$ и $(\beta_k - b_k)^2$ представляют собой величины, которые могут быть только положительны или равны нулю, а остальные члены не зависят от выбора чисел α_0, α_k, β_k. Отсюда следует, что, для того чтобы δ_n^2 имело наименьшее из своих возможных значений, необходимо и достаточно, чтобы каждая из вышеупомянутых скобок обращалась в нуль, т. е.

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \alpha_k = a_k, \quad \beta_k = b_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда вытекает справедливость следующей теоремы: **среди всех тригонометрических многочленов порядка n наименьшее среднее квадратическое уклонение от функции $f(x)$ имеет тот многочлен, коэфициенты которого служат коэфициентами разложения $f(x)$ в ряд Фурье.** Следовательно, сумма n первых членов ряда Фурье для $f(x)$ хотя и не обязана стремиться к $f(x)$ (потому что ряд Фурье, как мы знаем, не всегда сходится), но все же приближает в среднем функцию $f(x)$ лучше, чем всякий другой тригонометрический многочлен с таким же количеством членов.

§ 56. Неравенство Бесселя.

Если в формуле предыдущего параграфа, выражающей δ_n^2, положить

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \alpha_k = a_k, \quad \beta_k = b_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

то найдем:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx\right)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \qquad (1)$$

Так как подинтегральное выражение в левой части равенства при всех значениях x положительно или равно нулю, то интеграл также положителен или равен нулю, а потому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \geqslant 0,$$

или

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx.$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя*, и так как оно справедливо для всех значений n, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

сходится и

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx.$$

Впрочем, мы докажем в § 58, что знак неравенства в последней формуле можно отбросить, т. е. что мы имеем:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx.$$

Это замечательное равенство носит название *равенства Парсеваля*. Прежде чем перейти к его доказательству, поясним, какую роль оно играет в вопросе о приближении функции в среднем при помощи тригонометрического многочлена.

§ 57. Сходимость в среднем для ряда Фурье и равенство Парсеваля.

Условимся говорить, что *ряд*

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

сходится в среднем к функции $f(x)$ на (a, b), если

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=0,$$

где $S_n(x)$ есть сумма n первых членов рассматриваемого ряда. В частности, мы скажем, что ряд Фурье от $f(x)$ сходится в среднем к $f(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=0,$$

где $S_n(x)=\frac{a}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx$, а числа a_k и b_k, как всегда, обозначают коэфициенты Фурье для $f(x)$.

Докажем, что **если для некоторой функции $f(x)$ справедливо равенство Парсеваля, т. е.**

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx,$$

то ее ряд Фурье сходится к ней в среднем, и обратно, если ряд Фурье сходится в среднем к $f(x)$, то для нее справедливо равенство Парсеваля.

Действительно, на основании формулы (1) § 56 мы имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

или

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx. \quad (1)$$

Если ряд Фурье сходится в среднем к $f(x)$, то, по самому определению сходимости в среднем, это значит, что интеграл в правой части равенства (1) стремится к нулю при $n\to\infty$. Но тогда и левая часть равенства стремится к нулю, а это значит, что сумма n первых членов ряда $\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ стремится к $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx$ при $n\to\infty$, т. е. этот ряд сходится и имеет своей суммой указанную величину. Значит, равенство Парсеваля в этом случае доказано.

Обратно, если оно для некоторой $f(x)$ имеет место, то левая часть равенства (1) при $n\to\infty$ стремится к нулю, а значит, и правая часть стремится к нулю, т. е. ряд сходится в среднем к $f(x)$.

Мы докажем в § 58, что **для всякой кусочно-непрерывной функции справедливо равенство Парсеваля и, следовательно, для всякой кусочно-непрерывной функции ряд Фурье сходится в среднем к ней.**

Это обстоятельство очень важно для суждения о величине средней квадратической ошибки при замене $f(x)$ тригонометрическим многочленом. Действительно, в § 55 мы видели, что среди всех тригонометрических многочленов n-го порядка наилучшим образом приближает в среднем функцию $f(x)$ тот многочлен, коэфициентами которого являются коэфициенты Фурье от $f(x)$. Но возникает существенный вопрос: можно ли вообще говорить о том, что мы имели дело с „приближением" $f(x)$? Может быть величина средней квадратической ошибки очень велика даже и тогда, когда мы берем число членов тригонометрического многочлена очень большим? Ответ на этот вопрос может быть дан в следующей форме:

Для всякой кусочно-непрерывной функции $f(x)$ среднее квадратическое уклонение от нее тригонометрического многочлена n-го порядка с коэфициентами, равными ее коэфициентам Фурье, стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Действительно, так как для такого многочлена

$$\delta_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx,$$

то $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ каждый раз, как ряд Фурье сходится в среднем к $f(x)$, а мы докажем в § 58, что это имеет место для всякой кусочно-непрерывной функции.

§ 58. Доказательство равенства Парсеваля.

Мы начнем доказывать равенство Парсеваля для функций $f(x)$, непрерывных и имеющих непрерывную производную $f'(x)$, а потом уже перейдем к общему случаю.

Пусть $\varphi(x)$ определяется равенством

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) f(t)\,dt.$$

Ясно, что если $f(x)$ периодическая функция с периодом 2π, то и $\varphi(x)$ также. По правилу диференцирования интеграла по параметру имеем:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial}{\partial x}[f(x+t) f(t)]\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x+t) f(t)\,dt.$$

Так как $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны по условию, то $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ также непрерывны.

Найдем для функции $\varphi(x)$ ее коэфициенты Фурье. Имеем:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) f(t)\,dt\right]\cos nx\,dx.$$

Так как во внутреннем интеграле мы производим интеграцию по переменному t, то $\cos nx$ можно внести под знак интеграла; тогда получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) f(t)\cos nx\,dt$$

и

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) f(t)\cos nx\,dt\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) f(t)\cos nx\,dx\,dt,$$

так как порядок интегрирования мы можем изменить и интегрировать сначала по x, а потом по t.

Теперь во внутреннем интеграле $f(t)$ уже является постоянным, поэтому его можно вынести за знак внутреннего интеграла и писать:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)\cos nx\,dx\right\}dt.$$

Положим во внутреннем интеграле $x+t=u$; найдем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)\cos n(u-t)\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\cos n(u-t)\,du,$$

так как $f(u)$ — функция периодическая с периодом 2π.

Разлагая $\cos n(u-t)$ по известной формуле тригонометрии, найдем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\cos n(u-t)\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)(\cos nu\cos nt+\sin nu\sin nt)\,du=$$

$$=\cos nt\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\cos nu\,du+\sin nt\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\sin nu\,du=$$

$$=a_n\cos nt+b_n\sin nt,$$

где a_n и b_n — коэфициенты Фурье для $f(x)$.

Подставляя найденные формулы в выражение для A_n, мы будем иметь:

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,[a_n\cos nt+b_n\sin nt]\,dt=$$

$$=a_n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\,dt+b_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\,dt=a_n^2+b_n^2.$$

Итак,

$$A_n=a_n^2+b_n^2,\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

При $n=0$ имеем $\sin nt=0$, а потому предыдущая формула дает:

$$A_0=a_0^2.$$

Что касается коэфициентов B_n,

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx,$$

то они, как мы сейчас докажем, будут все равны нулю.

Чтобы убедиться в этом, докажем, что $\varphi(x)$ есть четная функция, т. е. $\varphi(x)=\varphi(-x)$. Действительно,

$$\varphi(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(-x+t)f(t)\,dt.$$

Полагая $t-x=u$, имеем:

$$\varphi(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u)f(u+x)\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u+x)f(u)\,du=\varphi(x),$$

так как $\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x}$ можно заменить через $\int\limits_{-\pi}^{+\pi}$ в силу того, что подинтегральная функция имеет период 2π.

Отсюда следует, что

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\varphi(x)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{0}\varphi(-x)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx=0, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

Следовательно, ряд Фурье для $\varphi(x)$, т. е. ряд

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx$$

принимает вид:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx.$$

Так как $\varphi(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную, то ее ряд Фурье сходится к ней в каждой точке (§ 54), т. е.

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}f(x+t)f(t)\,dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx.$$

Так как это равенство справедливо для всякого x, значит, и для $x=0$, то

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}f^2(t)\,dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2,$$

а это есть равенство Парсеваля.

Итак, равенство Парсеваля доказано для всякой непрерывной функции, имеющей непрерывную производную.

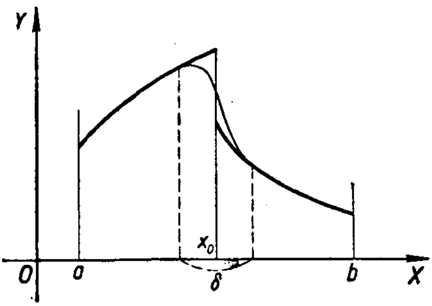
Мы хотим теперь перейти от этого случая к случаю любой кусочно-непрерывной функции.

Для этого заметим прежде всего, что, каково бы ни было ε, любую функцию $\varphi(x)$, кусочно-непрерывную на $(a,\ b)$, можно всегда приблизить в среднем с точностью до ε при помощи функции $f(x)$, непрерывной и имеющей непрерывную производную на $(a,\ b)$. Это значит, что каково бы ни было ε, можно для данной $\varphi(x)$ подобрать $f(x)$ так, чтобы

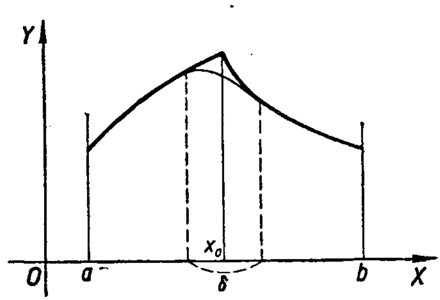
$$\int\limits_{a}^{b}[f(x)-\varphi(x)]^2\,dx<\varepsilon.$$

Для этого достаточно окружить каждую точку разрыва $\varphi(x)$ или точку, где у $\varphi(x)$ нет производной (см. соответственно черт. 33 и 34), при помощи маленького интервала δ и внутри этого интервала заменить кривую $y=\varphi(x)$ любой кривой $y=f(x)$, лишь бы только последняя была непрерывна, имела непрерывно вращающуюся касательную и чтобы в концах интервала δ сама эта функция и ее производная совпадали соответственно с $\varphi(x)$ и с ее производной.

Ясно, что $\int\limits_{\delta}[f(x)-\varphi(x)]^2\,dx$ можно сделать как угодно малым, если только δ достаточно мало, потому что подинтегральная функция ограничена. Можно, в частности, добиться того, чтобы этот интеграл был $<\frac{\varepsilon}{k}$, где k — число точек, около которых мы строили такие



Черт. 33.



Черт. 34.

интервалы δ. Если $f(x)$ сделать совпадающей с $\varphi(x)$ всюду на (a, b), кроме этих интервалов, то $\int\limits_a^b[f(x)-\varphi(x)]^2\,dx$ будет равен сумме интегралов вида $\int\limits_{\delta}[f(x)-\varphi(x)]^2\,dx$, а потому будет меньше, чем $k\cdot\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon$.

После этого замечания, перейдем к доказательству равенства Парсеваля для любой кусочно-непрерывной $\varphi(x)$.

Пусть ε задано. Найдем такую $f(x)$, непрерывную и с непрерывной производной на $(-\pi, +\pi)$, что

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}[\varphi(x)-f(x)]^2\,dx<\varepsilon. \tag{1}$$

Пусть α_n и β_n — коэфициенты Фурье для $\varphi(x)$; a_n и b_n — коэфициенты Фурье для $f(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Имеем:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[\varphi(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]^2 dx=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{[\varphi(x)-f(x)]+\left[f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]\right\}^2 dx<$$

$$< 2\int_{-\pi}^{+\pi}[\varphi(x)-f(x)]^2\,dx+$$

$$+2\int_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]^2 dx \tag{2}$$

[так как из $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geqslant 0$ для любых α и β следует $2\alpha\beta\leqslant\alpha^2+\beta^2$ для любых α и β, а потому $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\leqslant\leqslant 2\alpha^2+2\beta^2$ для любых α и β; заменяя положительную функцию другой, превосходящей ее, мы лишь увеличиваем интеграл, откуда и следует предыдущее неравенство].

Заметим теперь, что для $f(x)$ равенство Парсеваля уже доказано, так как она непрерывна и имеет непрерывную производную; поэтому мы знаем, что для нее

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]^2 dx \tag{3}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$, так как мы видели в § 57, что из равенства Парсеваля для некоторой $f(x)$ следует стремление к нулю среднего квадратического уклонения от $f(x)$ многочлена n-го порядка, коэфициентами которого являются ее коэфициенты Фурье. Поэтому, если только n достаточно велико, то интеграл (3) будет $<\varepsilon$, а потому из (1), (2) и (3) получим:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\varphi(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]^2 dx<4\varepsilon.$$

Но из результатов § 55 следует, что среди всех тригонометрических многочленов n-го порядка наименьшее среднее квадратическое уклонение от $f(x)$ имеет тот многочлен, у которого коэфициентами являются коэфициенты Фурье для $f(x)$, т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\varphi(x)-\left(\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right)\right]^2 dx<$$

$$<\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\varphi(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]^2 dx<\frac{4\varepsilon}{\pi},$$

а так как ε как угодно мало, то интеграл в левой части равенства стремится к нулю при $n\to\infty$. Но, на основании установленной в § 57 связи между сходимостью в среднем и равенством Парсеваля, отсюда следует, что и для $\varphi(x)$ равенство Парсеваля будет справедливо, т. е. мы доказали его для любой кусочно-непрерывной $\varphi(x)$.

§ 59. Теорема единственности.

Равенство Парсеваля дает возможность легко разрешить следующий вопрос, касающийся разложения функций и ряда Фурье: *могут ли существовать две различные функции, у которых ряды Фурье одинаковы?*

Для того чтобы этот вопрос не показался читателю лишенным смысла, обратим внимание на следующее обстоятельство: ряд Фурье вовсе не обязан сходиться. Если бы ряды Фурье для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ были сходящимися, причем ряд для $f(x)$ сходился бы к $f(x)$, а ряд для $\varphi(x)$ сходился бы к $\varphi(x)$, то в случае, когда эти ряды одинаковы, мы бы, разумеется, имели:

$$f(x) \equiv \varphi(x).$$

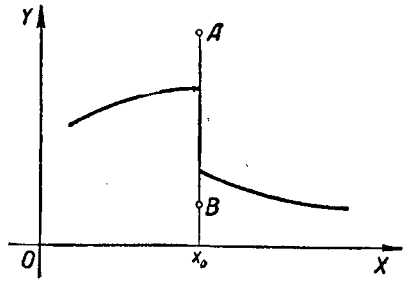
Но в том случае, когда ряд Фурье расходится, подобное заключение уже не является законным. Заметим, что для рядов Тейлора постановка аналогичного вопроса привела бы к неожиданным выводам. Действительно, нетрудно показать, что можно найти две различные функции, у которых ряды Тейлора одинаковы. Для этого достаточно вспомнить, что в § 34 мы построили функцию $F(x)$, для которой $F(0)=F'(0)=$ $=F''(0)=\ldots$. Если $f(x)$ есть любая функция, у которой существуют производные всех порядков в точке $x=0$, и если мы рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=f(x)+F(x),$$

то мы увидим, что

$$\varphi(0)=f(0) \quad \text{и} \quad \varphi^{(n)}(0)=f^{(n)}(0), \qquad n=1,\ 2,\ 3, \ldots;$$

поэтому ряд Тейлора для $\varphi(x)$ будет иметь те же коэфициенты, как ряд для $f(x)$, т. е. эти ряды будут одинаковы, а между тем $\varphi(x) \neq f(x)$ ни при каком $x>0$, так как $F(x)>0$ при любом $x>0$.



Черт. 35.

После этого примера становится ясным, что если у двух функций оказываются одинаковые ряды Фурье, то нельзя заранее сказать, будут ли эти функции совпадать между собой.

Следует еще остерегаться дать тривиальное решение этого вопроса. Заметим, что если, например (черт. 35), $f(x)$ имеет точку разрыва x_0, причем $f(x_0)=A$, а $\varphi(x)$ совпадает с $f(x)$ для $-\pi \leqslant x < x_0$ и для $x_0 < x \leqslant \pi$, но $\varphi(x_0)=B$ и $A \neq B$, то мы можем сказать, что $f(x) \not\equiv \varphi(x)$, так как $f(x_0) \neq \varphi(x_0)$, а между тем ряды Фурье для $f(x)$ и $\varphi(x)$ будут одинаковы, так как при вычислении интегралов отрезок $(-\pi, +\pi)$ разбивается на части от $-\pi$ до x_0 и от x_0 до π и каждый интеграл вычисляется в отдельности; при этом величина подинтегральной функции в самой точке x_0 никакой роли не играет.

Отсюда следует, что если поставленный вопрос понимать очень узко, т. е. считать, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ различны, если их значения различны хотя бы в одной точке, то действительно у двух разных функций могут существовать одинаковые ряды Фурье. Но такое решение не может нас удовлетворить, так как тривиальность его слишком очевидна.

Поэтому, изучая теорию рядов Фурье, мы условимся считать две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадающими, если $f(x)=\varphi(x)$ всюду на $(-\pi, +\pi)$, кроме, быть может, некоторого конечного числа точек; следовательно, различными мы будем считать две функции только тогда, когда неравенство $f(x) \neq \varphi(x)$ наблюдается для бесконечного множества значений x на $(-\pi, +\pi)$. Условившись в этой терминологии, поставим снова вопрос: могут ли две различные функции иметь одинаковые ряды Фурье?

Докажем, что ответ на этот вопрос является отрицательным, т. е. **не существует двух различных функций, у которых ряды Фурье одинаковы.**

Эту теорему можно назвать *теоремой единственности*, так как она показывает, что если данный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

является рядом Фурье от некоторой функции, то такая функция только одна.

Действительно, допустим обратное. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ две различные кусочно-непрерывные функции [1]), но ряд (1) является рядом Фурье для них обеих. Это значит, что

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad && n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\, dx, \qquad && n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и одновременно с этим

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\cos nx\, dx, \qquad && n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\sin nx\, dx, \qquad && n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Обозначим через $\psi(x)$ разность

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x);$$

тогда из формул (2) и (3) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(x)\cos nx\, dx &= 0, \qquad && n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(x)\sin nx\, dx &= 0, \qquad && n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \end{aligned}$$

Другими словами, $\psi(x)$ есть функция, у которой все коэфициенты Фурье равны нулю. Докажем, что это возможно только тогда, когда $\psi(x) = 0$ всюду, кроме, быть может, конечного числа точек.

---

[1]) Здесь, как и везде, мы проводим доказательство лишь для кусочно-непрерывных функций, хотя теорема верна и в более общем случае.

Действительно, для $\psi(x)$ мы имеем, на основании равенства Парсеваля,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\psi^2(x)\,dx=0,$$

так как этот интеграл должен равняться сумме квадратов коэфициентов Фурье для $\psi(x)$, а они все равны нулю. Так как функция $\psi(x)$ кусочно-непрерывна, как разность двух кусочно-непрерывных функций, то, обозначая через $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ее точки разрыва, если они существуют, мы имеем:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\psi^2(x)\,dx=\sum_{i=0}^{k}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\psi^2(x)\,dx,$$

где через a_0 мы обозначили точку $-\pi$ и через a_{k+1} точку π. Так как подинтегральная функция неотрицательна для всех значений x, то равенство нулю этой суммы возможно лишь при равенстве нулю каждого слагаемого, откуда

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}}\psi^2(x)\,dx=0,\qquad i=1,\ 2,\ldots,k.$$

Теперь в каждом из этих интегралов подинтегральная функция непрерывна и, кроме того, она неотрицательна. Для того чтобы интеграл был равен нулю, необходимо поэтому, чтобы $\psi(x)\equiv 0$ для $a_i<x<a_{i+1}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ldots,k)$. Таким образом, $\psi(x)$ должна быть равна нулю всюду, кроме, быть может, конечного числа точек a_i. Это показывает, что $f(x)$ отлична от $\varphi(x)$ самое большее в конечном числе точек и, следовательно, мы имеем право сказать, что они совпадают, так как мы условились называть две функции различными только тогда, когда они имеют разные значения в бесконечном множестве точек. Но если так, то мы пришли к противоречию, так как предполагалось, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ различны.

Теорема единственности является, таким образом, доказанной.

Сделаем еще одно небольшое замечание. Мы видели, что если ряд (1) является рядом Фурье для некоторой кусочно-непрерывной функции, то такая функция может быть только одна. Нетрудно, однако, показать, что если мы зададим произвольно числа a_0, a_n, b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ и составим из них ряд (1), то может не найтись ни одной кусочно-непрерывной функции, для которой этот ряд будет рядом Фурье. Действительно, из равенства Парсеваля следует, что если бы указанные числа были коэфициентами Фурье от некоторой кусочно-непрерывной функции $f(x)$, то ряд

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2 \tag{4}$$

должен был бы сходиться; поэтому, если для выбранных нами чисел этот ряд расходится, то ряд (1) уже не может быть рядом Фурье от кусочно-непрерывной функции. Таким будет, например, ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx+\ldots,$$

про который, однако, можно было бы доказать, что он сходится в каждой точке. Более того, если даже подобрать числа a_n и b_n так, чтобы ряд (4) сходился, то может не найтись такой *кусочно-непрерывной* $f(x)$, для которой ряд (1) будет рядом Фурье.

Но интересно отметить, что необходимость рассматривать лишь кусочно-непрерывные функции была вызвана тем, что мы пользовались обычным определением интеграла (интегралом Коши). Если обобщить понятие интеграла, как это было сделано Лебегом, то класс функций, допускающих интегрирование, станет значительно шире. Поэтому и теория рядов Фурье распространяется на гораздо более широкий класс функций. В частности, можно доказать, как это сделал Рис, что если ряд (4) сходится, то можно всегда найти функцию $f(x)$, для которой ряд (1) будет рядом Фурье (и равенство Парсеваля имеет место).

§ 60. Ряд Фурье для непрерывной и диференцируемой функции.

Если функция $f(x)$ непрерывна, но не имеет производной, то ее ряд Фурье не обязан сходиться. Можно показать на примерах, что ряд Фурье от непрерывной функции может расходиться в бесконечном множестве точек. Напротив, если $f(x)$ всюду непрерывна и имеет производную (которую мы будем, как всегда, предполагать кусочно-непрерывной), то ее ряд Фурье не только всюду сходится, но даже сходится равномерно на всей прямой. Мы сейчас докажем это предложение, но предварительно заметим, что, когда мы говорим „всюду непрерывна", то предполагается непрерывность на всей бесконечной прямой, и поэтому предполагается, что $f(\pi-0)=f(-\pi+0)$ (см. об этом подробнее в § 50). Ясно, что если бы $f(x)$ была разрывна хотя бы в одной точке, то ее ряд Фурье не мог бы равномерно сходиться к ней на всей прямой, так как мы знаем (§ 24), что равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций имеет суммой непрерывную функцию.

После этих общих замечаний перейдем к доказательству теоремы: **Если $f(x)$ непрерывна на всей бесконечной прямой и имеет кусочно-непрерывную производную $f'(x)$, то ряд Фурье для $f(x)$ сходится к ней равномерно на всей прямой.**

Для доказательства заметим, что коэфициенты Фурье a_n и b_n для $f(x)$ могут быть легко выражены через коэфициенты Фурье α_n и β_n ее производной $f'(x)$. Действительно, из

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

и

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos nx\,dx, \qquad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\sin nx\,dx$$

находим, интегрируя по частям два первых интеграла:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{+\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\beta_n,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[-f(x)\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{+\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\alpha_n,$$

так как $f(+\pi)=f(-\pi)$ в силу периодичности $f(x)$ и ее непрерывности для всех значений x.

Отсюда мы выведем, что ряд Фурье для $f(x)$ является мажорируемым рядом. В самом деле, записывая для функции $f'(x)$ неравенство Бесселя (§ 56), мы можем сказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$$

сходится. Но так как[1])

$$\left|\frac{1}{n}\beta_n\right|\leqslant\frac{1}{n^2}+\beta_n^2 \quad \text{и} \quad \left|\frac{1}{n}\alpha_n\right|\leqslant\frac{1}{n^2}+\alpha_n^2,$$

то

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{n^2}+\beta_n^2 \quad \text{и} \quad |b_n|\leqslant\frac{1}{n^2}+\alpha_n^2.$$

Поэтому в ряде Фурье для $f(x)$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

мы имеем:

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqslant\frac{2}{n^2}+(\alpha_n^2+\beta_n^2),$$

т. е. каждый член этого ряда для всех значений x меньше, чем член числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2}+\alpha_n^2+\beta_n^2\right),$$

а этот последний сходится, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (§ 10) и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$ также.

На основании критерия Вейерштрасса (§ 23) отсюда следует, что ряд Фурье для $f(x)$ сходится абсолютно и равномерно на всей бесконечной прямой.

Однако мы еще не доказали, что он сходится именно к $f(x)$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что если $f(x)$ всюду непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную, то она удовлетворяет условиям теоремы § 54, а потому ее ряд Фурье сходится именно к ней.

Можно было бы и не пользоваться теоремой § 54, а рассуждать так: раз ряд Фурье для $f(x)$ сходится равномерно, то его сумма есть непрерывная функция. Обозначим ее через $\varphi(x)$. Мы видели в § 49, что если некоторая функция есть сумма тригонометрического ряда, допускающего почленное интегрирование, то этот ряд есть ее ряд Фурье. Но равномерно сходящиеся ряды допускают почленное интегрирование (§ 25), а потому ряд Фурье для $f(x)$ оказывается вместе с тем и рядом Фурье для $\varphi(x)$. На основании теоремы единственности (§ 59) мы отсюда заключаем, что $\varphi(x)\equiv f(x)$, т. е. ряд Фурье для $f(x)$ сходится к ней самой.

[1]) Для любых двух положительных чисел A и B мы имеем $(A-B)^2\geqslant 0$, потому $A^2-2AB+B^2\geqslant 0$; значит, $2AB\leqslant A^2+B^2$, или $AB\leqslant\frac{1}{2}(A^2+B^2)$; значит, и подавно $AB\leqslant A^2+B^2$.

§ 61. Теорема Вейерштрасса для периодических функций.

Мы докажем, что для всюду непрерывных функций с периодом 2π имеет место теорема, очень похожая на теорему Вейерштрасса, рассмотренную нами в § 47 (она также доказана Вейерштрассом).

Теорема Вейерштрасса. **Если $f(x)$ всюду непрерывна и имеет период 2π, то существует ряд из тригонометрических многочленов,**

$$P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x)+\ldots,$$

сходящийся равномерно на всей бесконечной прямой и имеющий $f(x)$ своей суммой.

Таким образом, вместо обыкновенных многочленов здесь рассматриваются тригонометрические.

Эту теорему можно было бы получить, опираясь на уже указанную теорему § 47 при помощи некоторых формальных преобразований[1]). Мы предпочитаем доказать ее непосредственно, пользуясь результатами предыдущего параграфа.

В точности повторяя рассуждения, проведенные в § 47, мы легко убедимся, что только что сформулированная теорема эквивалентна следующему предложению:

Если $f(x)$ периодическая с периодом 2π и всюду непрерывная функция, то для всякого положительного числа ε можно найти такой тригонометрический многочлен $P(x)$, что

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

для всех значений x на бесконечной прямой.

Чтобы доказать это предложение, заметим прежде всего, что если периодическая функция $f(x)$ непрерывна всюду, то можно для заданного ε найти такое δ, что для всех x и для $|h|<\delta$

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon.$$

Обозначим через $\Phi(x)$ функцию, определяемую равенством

$$\Phi(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta} f(x+t)\,dt.$$

Ясно, что $\Phi(x)$ — функция периодическая с периодом 2π. Она непрерывна на всей бесконечной прямой, так как для всех x и для $|h|<\delta$

$$|\Phi(x+h)-\Phi(x)|\leqslant\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta}[f(x+t+h)-f(x+t)]\,dt<\varepsilon;$$

кроме того, она имеет производную

$$\Phi'(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta} f'(x+t)\,dt,$$

---

[1]) Так это и было сделано Валле-Пуссеном. Подробное изложение можно найти в курсе проф. В. Л. Гончарова „Теория интерполирования и приближения функций" (ГТТИ 1934), стр. 147—148. Там же доказано, что из теоремы Вейерштрасса для периодических функций выводится теорема Вейерштрасса, формулированная в § 47.

в чем можно убедиться, пользуясь формулой диференцирования интеграла по параметру. Раз так, то мы находимся в условиях теоремы § 60 и можем утверждать, что ряд Фурье для $\Phi(x)$ сходится равномерно к ней на всей бесконечной прямой. Поэтому для заданного ε можно найти такое n, что сумма $S_n(x)$ первых n членов ряда Фурье для $\Phi(x)$ удовлетворяет условию

$$|\Phi(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

для всех x. Но сумма n первых членов ряда Фурье есть тригонометрический многочлен. Итак, существует тригонометрический многочлен, который для всех x отличается от $\Phi(x)$ меньше, чем на ε. С другой стороны,

$$|\Phi(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{+\delta} f(x+t)\,dt-f(x)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{+\delta} f(x+t)\,dt-\frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{+\delta} f(x)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{+\delta}|f(x+t)-f(x)|\,dt<\varepsilon,$$

ибо $|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon$ при $|t|<\delta$. Отсюда следует, что

$$|f(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

а так как $S_n(x)$ есть тригонометрический многочлен, то теорема доказана.

Мы видим здесь снова большую аналогию со степенными рядами: не всякую, даже имеющую все производные, функцию можно разложить в сходящийся к ней ряд Тейлора, но всякую непрерывную функцию можно разложить в равномерно сходящийся ряд многочленов. Подобно этому не для всякой непрерывной функции ряд Фурье сходится, но всякую непрерывную функцию можно разложить в равномерно сходящийся ряд тригонометрических многочленов.

§ 62. Доказательство теоремы единственности на основе теоремы Вейерштрасса.

Интересно отметить, что из теоремы Вейерштрасса очень легко вывести теорему единственности (§ 59)[1]. Мы видели в § 59, что для доказательства теоремы единственности достаточно убедиться в том, что если $f(x)\not\equiv 0$, то у нее не могут равняться нулю все коэфициенты Фурье.

Заметим, прежде всего, что если $f(x)$ имеет все коэфициенты Фурье равными нулю, то для всякого тригонометрического многочлена $P(x)$

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,P(x)\,dx=0. \qquad (1)$$

Действительно,

$$P(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx,$$

---

[1]) Разумеется, тогда теорему Вейерштрасса надо доказывать, не опираясь на теорему единственности; но это можно сделать, либо как указано в § 61, опираясь на теорему Вейерштрасса для обыкновенных многочленов, либо, опираясь на теорему § 60, как мы это и сделали, но пользуясь при доказательстве этой теоремы результатами § 54.

а потому

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,P(x)\,dx = \frac{\alpha_0}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx +$$

$$+\beta_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0,$$

так как каждый из интегралов правой части равен нулю в силу предположения, что у $f(x)$ все коэфициенты Фурье равны нулю.

Итак, если $f(x)$ имеет все коэфициенты Фурье равными нулю, то для любого тригонометрического многочлена $P(x)$ справедливо равенство (1).

Покажем, что это возможно лишь при $f(x)\equiv 0$. Допустим сначала, что $f(x)$ всюду непрерывна. На основании теоремы Вейерштрасса, каково бы ни было ε, можно найти такой многочлен $P(x)$, для которого

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

для всех x. Отсюда следует, что так как

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,[f(x) - P(x)]\,dx + \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,P(x)\,dx$$

и последний интеграл равен нулю в силу равенства (1), то

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx < \varepsilon M\cdot 2\pi, \tag{2}$$

где через M мы обозначили такое число, для которого

$$|f(x)| < M, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

[такое число всегда существует, так как мы предположили $f(x)$ непрерывной].

Раз ε как угодно мало, то правая часть неравенства (2) как угодно мала, а в левой стоит постоянное число. Значит, это постоянное число есть нуль, т. е.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx = 0, \tag{3}$$

а это возможно для непрерывной $f(x)$ лишь при $f(x)\equiv 0$.

Если не предполагать, что $f(x)$ непрерывна, а лишь кусочно-непрерывна на $(-\pi, +\pi)$, то надо сначала найти такую непрерывную $\varphi(x)$, для которой

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - \varphi(x)]^2\,dx < \varepsilon \tag{4}$$

[в § 58 мы доказали, что это всегда возможно; надо, кроме того, позаботиться, чтобы $\varphi(\pi - 0) = \varphi(-\pi + 0)$, — тогда $\varphi(x)$ будет всюду непрерывна]. Далее найдем, на основании теоремы Вейерштрасса, такой многочлен $P(x)$, что

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon; \tag{5}$$

но

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,[f(x)-P(x)]\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,[f(x)-\varphi(x)]\,dx + \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,[\varphi(x)-P(x)]\,dx. \qquad (6)$$

Так как $f(x)$ кусочно-непрерывна, то она ограничена на $(-\pi, +\pi)$; значит, найдется такое M, что

$$|f(x)| < M, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \qquad (7)$$

На основании неравенства (5) и (7) мы видим, что последний интеграл формулы (6) удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,[\varphi(x)-P(x)]\,dx < \varepsilon M \cdot 2\pi. \qquad (8)$$

Кроме того, пользуясь неравенством Шварца[1]), мы находим на основании (4) и (7):

$$\left[\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,[f(x)-\varphi(x)]\,dx\right]^2 \leqslant \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx < M^2\,2\pi\varepsilon,$$

---

[1]) Неравенством Шварца называется следующее неравенство:

$$\left[\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx,$$

справедливое для любых двух функций f и ψ, допускающих интегрирование.

Для доказательства этого неравенства возьмем постоянное число λ и рассмотрим интеграл

$$\int_a^b [f(x)-\lambda\psi(x)]^2\,dx.$$

Он положителен или равен нулю при всех значениях λ, так как подинтегральная функция положительна или равна нулю для всех x, каковы бы ни были $f(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому

$$\int_a^b [f(x)-\lambda\psi(x)]^2\,dx = \int_a^b f(x)^2\,dx - 2\lambda\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx + \lambda^2\int_a^b \psi^2(x)\,dx \geqslant 0$$

для всех значений λ. Но если

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C \geqslant 0$$

при всех λ, то это значит, что квадратное уравнение $A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0$ или не имеет действительных корней, или имеет два равных корня, но корни его не могут быть действительны и различны между собой. Отсюда следует, что выражение $B^2 - AC$, стоящее под знаком корня в формуле для решения этого уравнения, должно быть $\leqslant 0$, а потому $B^2 \leqslant AC$ или

$$\left[\int_a^b f\psi\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2\,dx \int_a^b \psi^2\,dx.$$

значит, первый интеграл в правой части формулы (6) удовлетворяет неравенству

$$\left|\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,[f(x)-\varphi(x)]\,dx\right| < M\sqrt{2\pi\varepsilon}. \tag{9}$$

Из формул (6) (8) и (9) вытекает, что $\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx$ может быть сделан как угодно малым, так как ε как угодно мало; значит, этот интеграл равен нулю, а потому $f(x) \equiv 0$ (кроме, быть может, конечного числа точек, как мы это уже указывали, доказывая теорему единственности в § 59).

§ 63. Вывод равенства Парсеваля из теоремы Вейерштрасса.

Равенство Парсеваля также очень легко выводится из теоремы Вейерштрасса.

Допустим, сначала, что $f(x)$ всюду непрерывна. Следовательно, каково бы ни было ε, существует такой тригонометрический многочлен $P(x)$, что для всех x

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - P(x)]^2\,dx < 2\varepsilon^2.$$

Многочлен $P(x)$ имеет порядок, равный некоторому числу n. Рассмотрим сумму n первых членов ряда Фурье для $f(x)$; пусть это будет $S_n(x)$. Мы знаем (§ 55), что среди всех тригонометрических многочленов n-го порядка $S_n(x)$ будет иметь наименьшее среднее квадратическое уклонение от $f(x)$, т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\,dx \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - Q(x)]^2\,dx,$$

каков бы ни был тригонометрический многочлен $Q(x)$ порядка n. В частности, если $Q(x) = P(x)$, то предыдущее неравенство сохраняет силу, а потому

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\,dx < 2\varepsilon^2.$$

Так как ε как угодно мало, то интеграл в левой части неравенства может быть сделан как угодно малым, а это, как мы видели в § 57, и доказывает справедливость равенства Парсеваля.

Переход от функции всюду непрерывной к функции кусочно-разрывной совершается так, как было указано в § 58.